ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

<< САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ >>

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

для студентов заочного факультета.

1 курс. Тема: линейная алгебра
и аналитическая геометрия

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ
2012

Рекомендовано научно-методическим советом университета

Методические указания и контрольные задания для студентов заочного факультета. 1 курс. Тема: Линейная алгебра и аналитическая геометрия. - СПб.: Изд-во СПбГУЭФ.- 2012.-37 с.

Методические указания предназначены для студентов 1 курса заочного факультета, проходящих курс обучения по направлениям "Экономика"и "Менеджмент". Данные указания содержат теоретический материал, подробный разбор типовых задач и контрольные задания.

Составители: ст.препод. И.В.Кондратьева, доц. И.К.Лицкевич, асс. К.С.Мамаева, асс. Л.Р.Рыбкина, доц. Е.З.Хотимская

Рецензенты:

доц. А.И.Плоткин,
доц. А.А.Тамонов

Студенты, обучающиеся по направлениям "Экономика" и "Менеджмент", выполняют контрольную работу по теме "Линейная алгебра и аналитическая геометрия".

Место дисциплины в структуре ООП направления "Менеджмент": дисциплина "Математика" относится к циклу Б.2. Математический и естественнонаучный цикл. Базовая часть. Входные знания, умения и компетенции студентов должны соответствовать курсу математики общеобразовательной школы. Дисциплина "Математика" является предшествующей для следующих дисциплин: "Статистика", "Методы принятия управленческих решений", "Теория вероятностей и математическая статистика", "Математические методы и модели в принятии решений", "Финансовая математика", "Экономико-математические методы в управлении качеством продукции", "Теория менеджмента", "Маркетинг", "Управление изменениями", "Логистика".

Место дисциплины в структуре ООП направления "Экономика": дисциплина "Линейная алгебра" относится к циклу Б.2.1. Математический цикл. Базовая часть. Входные знания, умения и компетенции студентов должны соответствовать курсу математики общеобразовательной школы. Дисциплина "Линейная алгебра" является предшествующей для следующих дисциплин: "Математический анализ, "Теория вероятностей и математическая статистика", "Методы оптимальных решений, "Информатика", "Математические методы и модели", "Микроэкономика", "Макроэкономика", "Статистика", "Эконометрика".

Правила выполнения и оформления контрольной работы

При выполнении контрольных работ необходимо придерживаться нижеизложенных правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольную работу следует выполнять в тетради, отдельной для каждой работы, чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы, название дисциплины; здесь же следует указать дату отсылки работы в университет и адрес студента. В конце работы следует проставить дату ее выполнения и расписаться.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также содержащие задачи другого варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие, подставляя конкретные данные из решаемого варианта.

6. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. После получения незачтенной прорецензированной работы студент должен исправить все указанные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента. Исправления следует присылать вместе с прорецензированной работой и рецензией. В связи с этим рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается. В случае отсутствия прямого указания на то, что студент может ограничиться исправлением отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

8. Поскольку на рецензирование работы преподавателю отводится две недели, задания следует высылать на проверку заблаговременно.

9. К экзамену допускаются студенты, получившие положительную рецензию на работу.

Экзамен проводится в форме теста, и результаты оцениваются в соответствии с балльно-рейтинговой системой. Экзаменационные оценки определяются по баллам, полученным при тестировании по правилу:

"неудовлетворительно" - от 0 до 54 баллов включительно;

"удовлетворительно" - от 55 до 69 баллов включительно;

"хорошо" - от 70 до 84 баллов включительно;

"отлично" - от 85 баллов и выше.

Теоретический материал

Раздел I. Аналитическая геометрия и элементы векторной алгебры

1.Прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве. В заданной системе координат каждой точке M плоскости соответствует упорядоченная пара чисел $(x; y)$ и, обратно, каждой паре чисел $(x; y)$ соответствует единственная точка M плоскости xOy. Если же точка M задана в пространстве, то она определяется тремя координатами – $(x; y; z)$.

Расстояние $d = |M_1M_2|$ между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

Для точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, заданных в пространстве, справедлива аналогичная формула:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Зная координаты концов $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$ отрезка AB, можно найти координаты точки $M(x_M; y_M; z_M)$, которая делит данный отрезок в отношении $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$, по формулам:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

В частности, если точка M является серединой отрезка AB, т.е. $|AM| = |MB|$, то $\lambda = 1$ и формулы (2) принимают вид:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}. \tag{3}$$

Пример 1. В треугольнике с вершинами $A(-2;0)$, $B(6;6)$ и $C(1;-4)$ определить длины медианы AD и биссектрисы AE.

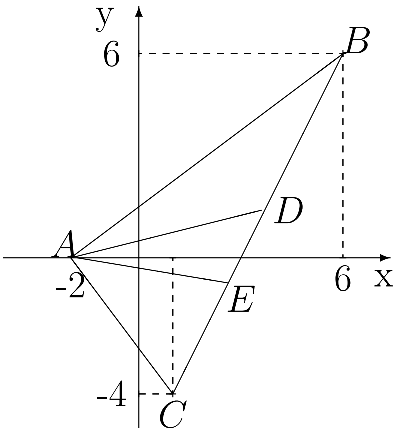

Рис.1

Решение. а) Так как AD – медиана, то точка D делит отрезок BC пополам. Следовательно, $\frac{|BD|}{|DC|} = \lambda = 1$. Координаты точки D найдем по формулам (3):

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2},$$

$$y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{6-4}{2} = 1\,.$$

По формуле (1) находим длину медианы AD:

$$|AD| = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{7}{2}+2\right)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}.$$

б) Для того чтобы вычислить длину биссектрисы AE, надо найти координаты точки E. Напомним, что биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. $\lambda = \frac{|BE|}{|EC|} = = \frac{|AB|}{|AC|}$.

Следовательно, надо вычислить $|AB|$ и $|AC|$.

$$|AB| = \sqrt{(6-(-2))^2 + (6-0)^2} = \sqrt{64+36} = 10,$$

$$|AC| = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$

$$\lambda = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{10}{5} = 2.$$

Итак, точка E делит отрезок BC в отношении $\lambda = |BE|/|EC| = \dfrac{2}{1} = 2$. Тогда по формулам (2) находим:

$$x_E = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{6 + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{8}{3}, \quad y_E = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{6+2(-4)}{1+2} = -\frac{2}{3}.$$

Длину биссектрисы находим по формуле (1):

$$|AE| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}-(-2)\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{196}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{10}{3}\sqrt{2}.$$

Ответ: а) $|AD| = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$; б) $|AE| = \dfrac{10}{3}\sqrt{2}$.

2. Прямая линия на плоскости. В аналитической геометрии *уравнением линии* в прямоугольной системе координат называется такое уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты всех точек, лежащих на линии, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней.

Прямая линия на плоскости в декартовой системе координат задается линейным уравнением с двумя переменными.

Любую прямую на плоскости можно описать *общим уравнением*

$$Ax + By + C = 0,$$

где A и B – координаты вектора нормали

$$\vec{N} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath},$$

перпендикулярного данной прямой (см. рис.2).

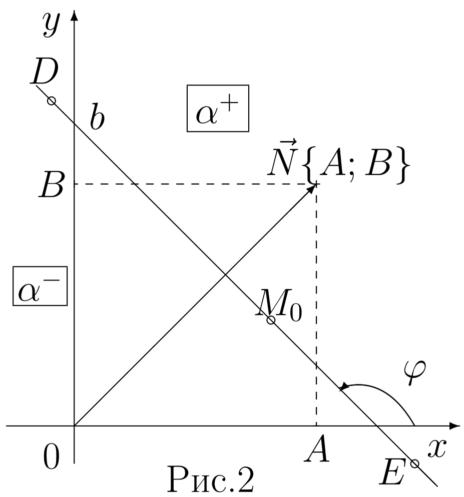

Рис.2

Прямые, не параллельные оси ординат, могут быть описаны *уравнением с угловым коэффициентом* k:

$$y = kx + b. \tag{4}$$

Здесь $k = \mathrm{tg}\varphi$, где φ – угол, который прямая составляет с положительным направлением оси абсцисс, отсчитываемый от оси $0x$ против часовой стрелки; b – ордината точки пересечения прямой с осью $0y$ (см. рис.2).

Пусть заданы две прямые

$$l_1 : y = k_1x + b_1, \quad l_2 : y = k_2x + b_2.$$

Тогда угол ϑ между ними вычисляется по формуле

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Из этой формулы следуют, в частности:

$$k_1 = k_2 \iff l_1 \| l_2 \quad (\textit{признак параллельности прямых}), \tag{5}$$

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \iff l_1 \perp l_2 \ (\textit{признак перпендикулярности прямых}). \tag{6}$$

Если задана точка $M_0(x_0; y_0)$, через которую проходит прямая, и известен ее угловой коэффициент k, то уравнение этой прямой имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{7}$$

Если же в уравнении (7) угловой коэффициент k является произвольным параметром, то это уравнение задает *пучок прямых*, проходящих через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $D(x_D; y_D)$ и $E(x_E; y_E)$, имеет вид:

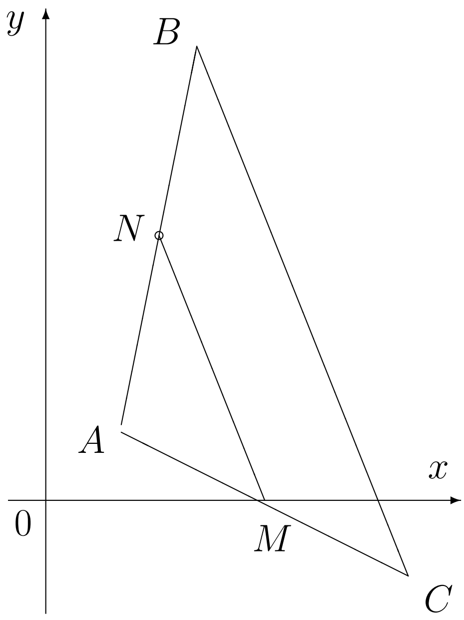

Рис.3

$$\frac{y - y_D}{y_E - y_D} = \frac{x - x_D}{x_E - x_D} \tag{8}$$

(при условии, что $x_E \neq x_D$ и $y_E \neq y_D$). Если $y_E = y_D$, то уравнение искомой прямой имеет вид: $y = y_D$. В этом случае прямая параллельна оси $0x$. Если $x_E = x_D$, то прямая параллельна оси $0y$, и ее уравнение имеет вид: $x = x_D$.

Пример 2. Задан треугольник с вершинами $A(1; 1)$, $B(2; 5)$ и $C(5; -1)$.

Найти уравнения стороны BC и средней линии MN треугольника, параллельной BC.

Решение. Подставив координаты точек B и C в формулу (8), получаем уравнение прямой BC:

$$\frac{y - 5}{-1 - 5} = \frac{x - 2}{5 - 2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3(y - 5) = -6(x - 2),$$

или, окончательно,

$$y = -2x + 9.$$

Применяя формулы (3), найдем координаты точки N – середины стороны AB:

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2}; \qquad y_N = \frac{y_A + y_B}{2} = 3.$$

Так как средняя линия параллельна стороне BC, то $k_{NM} = k_{BC} = -2$ (см.(5)). Подставляя известные данные в формулу (7), получаем искомое уравнение:

$$y - 3 = -2(x - \frac{3}{2}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = -2x + 6.$$

Ответ: 1) $y = -2x+9$ - уравнение прямой BC; 2) $y = -2x+6$ - уравнение средней линии NM.

Пример 3. Найти проекцию точки $M(8; -2)$ на прямую $l : 3x - 2y - 6 = 0$.

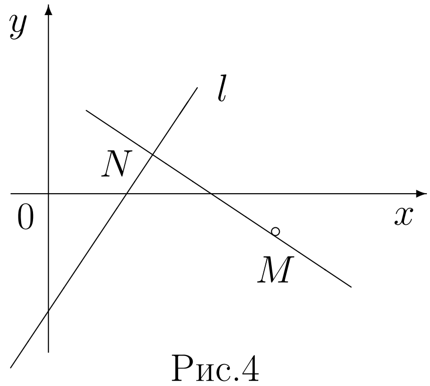

Рис.4

Решение. Проекцией точки M на прямую l называют точку пересечения прямой l и перпендикуляра, опущенного из точки M на l (см. рис.4). Уравнение перпендикуляра ищем в виде (4):

$$y + 2 = k\,(x - 8).$$

Значение k найдем из условия перпендикулярности (6): $k = -\dfrac{1}{k_l}$. Для определения углового коэффициента k_l прямой l представим ее уравнение в виде $y = kx + b$:

$$3x - 2y - 6 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad y = \frac{3}{2}x - 3.$$

Следовательно, $k_l = \dfrac{3}{2}$, а $k = -\dfrac{1}{k_l} = -\dfrac{2}{3}$, и уравнение перпендикуляра имеет вид:

$$y + 2 = -\frac{2}{3}(x - 8) \qquad \text{или} \qquad y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}.$$

Координаты точки N пересечения перпендикуляра и прямой l найдем, решая систему:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - 2; \\[2ex] y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{32}{13}; \\[2ex] y = \dfrac{22}{13}; \end{cases} \Longleftrightarrow N\left(\frac{32}{13}; \frac{22}{13}\right).$$

Ответ: точка $N\left(\dfrac{32}{13}; \dfrac{22}{13}\right)$ является проекцией точки M на прямую l.

3. Геометрический смысл линейного неравенства с двумя неизвестными. Пусть дано уравнение

$$Ax + By + C = 0, \qquad (A^2 + B^2 \neq 0).$$

Прямая, соответствующая этому уравнению, делит плоскость $x0y$ на две полуплоскости. Напомним, что данному уравнению удовлетворяют координаты только тех точек, которые лежат на этой прямой. Координаты точки $M(x; y)$, которая лежит в одной из полуплоскостей (но не лежит на прямой), удовлетворяют либо неравенству $Ax + By + C > 0$, либо неравенству $Ax + By + C < 0$. Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $Ax+By+C > 0$ (или $Ax+By+C < 0$), называется областью решений соответствующего неравенства. Геометрически областью решений является полуплоскость. В случае нестрогих неравенств $Ax+By+C \le 0$ и $Ax+By+C \ge 0$ в область решений, кроме полуплоскости, входит и прямая $Ax+By+C=0$.

Чтобы построить область решений неравенства $Ax + By + C > 0 \quad (< 0)$, необходимо:

1) построить прямую $Ax + By + C = 0$;
2) подставить в выражение $Ax + By + C$ координаты любой точки, не принадлежащей прямой, и определить знак этого выражения.

Если рассматриваемое неравенство удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая данную точку, если же неравенство не выполнено, то областью решений служит другая полуплоскость.

Линейное неравенство можно решить графически, руководствуясь следующим правилом.

Координаты точек той полуплоскости, которая расположена от прямой $Ax + By + C = 0$ в направлении вектора нормали $\vec{N}\{A;B\}$, удовлетворяют неравенству $Ax+By+C>0$. Обозначим эту полуплоскость α^+ (см. рис. 2).

Координаты точек полуплоскости, которая расположена от прямой $Ax + By + C = 0$ в направлении, противоположном направлению вектора нормали $\vec{N}\{A;B\}$, удовлетворяют неравенству $Ax + By + C < 0$. Обозначим эту полуплоскость α^- (см. рис.2).

Пример 4. Дана прямая

$$2x - 5y + 6 = 0$$

и точки $M(-2;2)$ и $K(5;1)$. Выяснить, лежат ли эти точки по одну или по разные стороны от данной прямой.

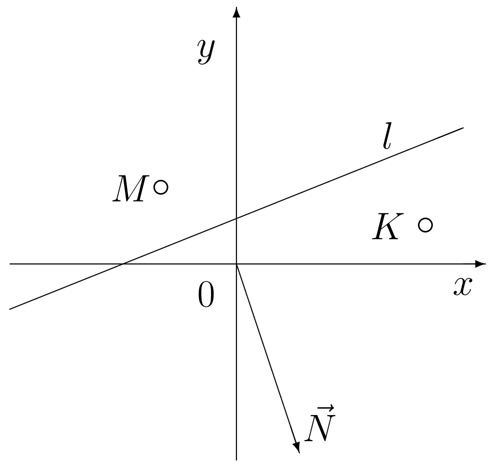

Рис.5

Решение. Прямая $2x-5y+6=0$ делит плоскость на две полуплоскости

$$2x-5y+6>0 \quad \text{и} \quad 2x-5y+6<0.$$

Подставим координаты точек M и K в выражение $2x-5y+6$. Координаты точки M удовлетворяют неравенству $2x-5y+6<0$:

$$2\cdot(-2) - 5\cdot 2 + 6 = -8 < 0.$$

Значит, точка M принадлежит полуплоскости α^-. Аналогично для точки K имеем $2\cdot5-5\cdot1+6=11>0$. Значит, точка K принадлежит полуплоскости α^+, определяемой неравенством $2x-5y+6>0$. Следовательно, заданные точки M и K лежат в разных полуплоскостях, т.е. по разные стороны от прямой $2x-5y+6=0$ (см. рис.5).

Ответ: точки M и K лежат по разные стороны от данной прямой.

4. Элементы векторной алгебры. Векторы принято обозначать либо $\vec{a}$, либо $\overrightarrow{AB}$, где A – начало, а B – конец вектора. В выбранной системе координат вектор однозначно задается своими координатами:

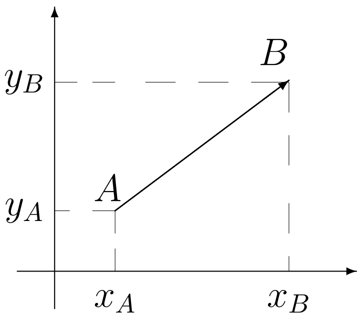

Рис.6

$$\vec{a}\{a_x, a_y\} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath},$$
$$(\text{ на плоскости (см. рис.6)})$$
$$\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k},$$
$$(\text{ в пространстве}) \tag{9}$$

где a_x, a_y, a_z – *координаты вектора*, а $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ – единичные векторы сонаправленные с координатными осями (орты координатных осей). Равенства (9) называются разложением вектора по координатным осям.

Координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ связаны с координатами его концов $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$ формулами:

$$a_x = x_B - x_A, \qquad a_y = y_B - y_A, \qquad a_z = z_B - z_A. \tag{10}$$

Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух векторов называют произведение их длин, умноженное на косинус угла φ между этими векторами:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Для векторов, заданных в координатной форме, справедливы соотношения:

$$\vec{a}=\vec{b} \iff \begin{cases} a_x &= b_x, \\ a_y &= b_y, \\ a_z &= b_z; \end{cases}$$

$$\vec{a}=\lambda\vec{b} \iff \begin{cases} a_x &= \lambda b_x, \\ a_y &= \lambda b_y, \\ a_z &= \lambda b_z; \end{cases} \tag{11}$$

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b} \iff \begin{cases} c_x &= a_x+b_x, \\ c_y &= a_y+b_y, \\ c_z &= a_z+b_z. \end{cases}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z;$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})}=\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}.$$

$$cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2+{a_z}^2}\sqrt{{b_x}^2+{b_y}^2+{b_z}^2}}. \tag{12}$$

Пример 5. Найти вектор $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$ и косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$, где $A(1;-3;2)$, $B(4;5;-1)$, $C(0;2;-3)$, $D(3;-2;5)$ – заданные точки.

Решение: Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формулам (10):

$$a_x=4-1=3,\ a_y=5+3=8,\ a_z=-1-2=-3;\ \vec{a}=3\vec{\imath}+8\vec{\jmath}-3\vec{k}.$$

Аналогично $\vec{b}=3\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+8\vec{k}$. Вектор $\vec{c}$ и $cos\varphi$ найдем по формулам (11) и (12):

$$\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}=3(3\vec{\imath}+8\vec{\jmath}-3\vec{k})-2(3\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+8\vec{k})=$$
$$=(9-6)\vec{\imath}+(24+8)\vec{\jmath}+(-9-16)\vec{k}=3\vec{\imath}+32\vec{\jmath}-25\vec{k};$$

$$cos\varphi=\frac{3\cdot3+8\cdot(-4)+(-3)\cdot8}{\sqrt{3^2+8^2+3^2}\sqrt{3^2+4^2+8^2}}=\frac{-47}{\sqrt{82}\sqrt{89}}.$$

Ответ: 1) $\vec{c}=3\vec{\imath}+32\vec{\jmath}-25\vec{k}$; 2) $cos\varphi=\dfrac{-47}{\sqrt{82}\sqrt{89}}$.

Раздел II. Линейная алгебра

1.Матрицы

Напомним, что *матрицей* размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Эти числа называются ее *элементами.*

В общем виде матрицу A размера $m \times n$ записывают следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы снабжены двумя индексами, первый из которых указывает номер строки, а второй - номер столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Более компактной является такая запись: $A = (a_{ij})_{m\times n}$, где a_{ij} - общий вид элемента матрицы A.

Матрица A^T размера $n \times m$ называется *транспонированной матрицей* по отношению к матрице A размера $m \times n$, если элементы, расположенные в i-й строке матрицы A, образуют i-й столбец матрицы A^T.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрицы одинакового размера можно складывать и вычитать. Суммой $A+B$ матриц $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формулам

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \qquad i = 1, 2, ...m; \quad j = 1, 2, ...n.$$

Аналогично определяется разность двух матриц.

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}; \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы на число каждый элемент исходной матрицы умножается на это число. Таким образом, произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$

на вещественное число λ называется матрица $D = (d_{ij})_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формулам

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}; \qquad i = 1, 2, ...m; \quad j = 1, 2, ...n.$$

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы A на матрицу B определено только при условии, что число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B. При выполнении этого условия элементы матрицы-произведения AB, вычисляются по "правилу умножения строки на столбец". Итак, произведением AB матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ на матрицу $B = (b_{jk})_{n\times p}$ называется матрица

$$C_{m\times p} = A_{m\times \underbrace{n) B_{n}}\times p},$$

элементы которой вычисляются по формулам

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk}; \qquad i = 1, 2, ...m; \quad k = 1, 2, ...p.$$

Пример 4.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 5 & 2\cdot 6 + 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 \\ 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 4\cdot 5 & 1\cdot 6 + 0\cdot(-2) + 4\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}.$$

Матрица размера $n \times n$, то есть матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной матрицей порядка* n. Квадратной матрице A по некоторому правилу сопоставляется число, которое называется *определителем* этой матрицы и обозначается $|A|$. Напомним правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков. Определитель 2-го порядка равен разности произведений элементов главной диагонали и элементов второй диагонали.

Пример 5.

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 4\cdot 8 - 7\cdot 3 = 11.$$

Определители 3-го порядка можно вычислять по "правилу Саррюса": приписать справа к определителю его первые два столбца и составить сумму произведений элементов, в которой произведения элементов главной диагонали определителя и произведения элементов, лежащих на двух ей параллельных прямых, входят со знаком "плюс а произведения элементов второй диагонали и элементов на параллельных этой диагонали прямых - со знаком "минус". Схема вычисления определителя 3-го порядка выглядит так:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \ominus & \ominus & \ominus \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\
a_{31} & a_{23} & a_{33} & a_{31} & a_{23} & \\
 & & & \oplus & \oplus & \oplus
\end{array}$$

Тогда имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Пример 6. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Припишем справа к столбцам данного определителя его первые два столбца и отметим знаки произведений:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \ominus & \ominus & \ominus \\
1 & 3 & 2 & 1 & 3 & \\
0 & 4 & -1 & 0 & 4 & \\
5 & 6 & -2 & 5 & 6 & \\
 & & & \oplus & \oplus & \oplus
\end{array}$$

Итак,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) \cdot 6 -$$
$$- 3 \cdot 0 \cdot (-2) = -57.$$

При вычислении определителей более высокого порядка следует использовать свойства определителей; в частности, можно воспользоваться формулой разложения определителя по элементам строки или столбца.

Полезно отметить, что, применяя свойства определителей, можно привести определитель к так называемому треугольному виду: сделать равными нулю все элементы ниже или выше главной диагонали. Можно показать, что треугольный определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Квадратная матрица E, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а остальные элементы равны 0, называется *единичной матрицей.*

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* к матрице A, если справедливо соотношение:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Если матрица A квадратная и ее определитель $|A|$ отличен от нуля, то обратная матрица A^{-1} существует и единственна. Опишем способ вычисления обратной матрицы. Для каждого элемента a_{ik}, стоящего на пересечении i-й строки и k-го столбца определителя $|A|$, вычислим его *алгебраическое дополнение* A_{ik} - определитель, полученный из $|A|$ вычеркиванием i-й строки и k-го столбца и взятый со знаком "+ если $(i + k)$ — четно, и со знаком "− если $(i + k)$ — нечетно. Заменим каждый элемент a_{ik} матрицы A соответствующим алгебраическим дополнением A_{ik} и составленную таким способом матрицу транспонируем. В результате получим матрицу, которая называется *присоединенной (союзной)* к матрице A и обозначается A^*.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Формула для нахождения обратной матрицы имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*.$$

Пример 7. Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель $|A|$, приводя его к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3.$$

На первом этапе мы к элементам 3-й строки прибавили элементы 1-й, умноженные на (-2); на втором этапе к элементам 3-й строки прибавили элементы 2-й, умноженные на (-4).

Так как $|A| \neq 0$, то A^{-1} существует.

Вычисляем алгебраические дополнения всех элементов определителя $|A|$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2, A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4, A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Составляем присоединенную матрицу A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что алгебраические дополнения элементов каждой строки матрицы A расположены в соответствующем столбце матрицы A^*.

Находим теперь обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверкой убеждаемся в правильности полученного результата:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = E.$$

С помощью обратной матрицы можно решать матричные уравнения

$$AX = B \quad \text{и} \quad XA = B,$$

где A и B – заданные матрицы, а X – неизвестная матрица. Если матрица A^{-1} существует, то уравнение вида

$$AX = B$$

имеет решение:

$$X = A^{-1}B.$$

Для уравнения

$$XA = B$$

решение имеет вид:

$$X = BA^{-1}.$$

Пример 8. Решить матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} уже найдена в примере 7. Тогда получаем

$$X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5/3 \\ -1 & 1/3 \\ -2 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Для проверки подставим найденную матрицу X в исходное уравнение:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Для любой прямоугольной матрицы определяется понятие *ранга* этой матрицы. Выбирая произвольным образом несколько строк и такое же число столбцов матрицы, составим определитель из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов. Каждый такой определитель называется *минором* исходной матрицы.

Пример 9. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Выбирая 1-ю и 3-ю строки, 1-й и 4-й столбцы данной матрицы, получаем минор 2-го порядка матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 12 = -5.$$

Выбирая первые две строки и первые два столбца, получим другой минор 2-го порядка этой же матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Взяв три строки и первые три столбца, составим минор 3-го порядка исходной матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Число r называется *рангом матрицы* А, если выполнены следующие условия:

1) среди миноров порядка r есть по крайней мере один, отличный от нуля;

2) все миноры порядка большего, чем r, матрицы A либо равны нулю, либо не могут быть составлены.

Ранг матрицы A обозначается $r(A)$.

Минор, отличный от нуля, порядок которого совпадает с рангом матрицы, называется *базисным минором.*

Пример 10. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

В примере 9 уже показано, что у матрицы A есть ненулевой минор 2-го порядка и один из миноров 3-го порядка равен нулю. Вычислим остальные миноры 3-го порядка, соответствующие другим возможным способам выбора трех столбцов матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры 3-го порядка рассматриваемой матрицы оказались равными нулю. Поскольку у матрицы существует ненулевой минор 2-го порядка, а все миноры порядка, большего, чем два, равны нулю или не могут быть составлены, то ранг этой матрицы равен двум.

Ранг матрицы можно вычислить гораздо проще, не перебирая все миноры, а применяя так называемые *элементарные преобразования матрицы*, не меняющие ее ранга:

1) перестановка двух параллельных рядов (строк или столбцов);

2) умножение всех элементов ряда на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам одного ряда соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число;

4) вычеркивание одного из двух пропорциональных параллельных рядов;

5) вычеркивание ряда, состоящего только из нулей;

6) транспонирование матрицы.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, при котором все элементы главной диагонали будут отличны от нуля, а все элементы матрицы, стоящие ниже главной диагонали, будут равны нулю. Ранг такой матрицы равен числу ее строк, а, следовательно, этому же числу будет равен и ранг исходной матрицы.

Пример 11. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Здесь на первом шаге мы получили нулевые элементы в первом столбце ниже элемента главной диагонали. Для этого элементы 1-й строки умножили на (-2) и прибавили к соответствующим элементам 2-й, затем, умножив элементы 1-й строки на (-5), прибавили к соответствующим элементам 3-й и, наконец, умноженные на (-7) элементы 1-й строки прибавили к элементам 4-й.

На втором шаге вычеркнули 3-ю строку, поскольку 2-я и 3-я строки являются пропорциональными.

На третьем шаге к элементам 3-й строки прибавили элементы 2-й, умноженные на (-2).

На четвертом шаге поменяли местами 3-й и 4-й столбцы, получив ненулевой элемент на главной диагонали в 3-й строке.

Таким образом, в результате элементарных преобразований исходной матрицы мы получили матрицу, ранг которой равен трем, поскольку у этой матрицы нет миноров порядка большего, чем три, и существует ненулевой минор 3-го порядка. Этот минор является треугольным определителем с ненулевыми элементами на главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) \cdot (-4) = 28 \neq 0.$$

Заметим, что этот минор является базисным для данной матрицы.

2.Системы линейных уравнений

В общем виде систему m линейных уравнений с n неизвестными можно записать так:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Эту систему можно решать методом Гаусса, последовательно исключая сначала первую переменную из всех уравнений, начиная со второго, затем вторую переменную из всех уравнений, начиная с третьего и так далее. Для этого используют следующие преобразования, каждое из которых заменяет исходную систему системой, ей равносильной:

1) взаимная перестановка двух уравнений;

2) умножение обеих частей одного из уравнений на число, отличное от нуля;

3) замена одного из уравнений суммой его с другим уравнением, умноженным на некоторое число;

4) вычеркивание из системы одного из двух пропорциональных уравнений;

5) вычеркивание из системы уравнения, в котором все коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю;

6) взаимная перестановка двух неизвестных во всех уравнениях.

Если в ходе преобразований появится система, в которой одно из уравнений будет иметь нулевые коэффициенты при всех неизвестных, и отличный от нуля свободный член, то очевидно, что такая система *несовместна*, то есть не имеет решения. А значит, несовместной является и исходная система линейных уравнений. Если подобная ситуация не возникла в процессе преобразований системы, то имеет место один из двух случаев.

1. Число уравнений полученной в результате преобразований системы равно числу неизвестных, то есть, система преобразуется к виду:

$$\begin{array}{cccccccc}
\widetilde{a}_{11}x_1 & + & \widetilde{a}_{12}x_2 & + & \cdots & + & \widetilde{a}_{1n}x_n & = & \widetilde{b}_1, \\
 & & \widetilde{a}_{22}x_2 & + & \cdots & + & \widetilde{a}_{2n}x_n & = & \widetilde{b}_2, \\
 & & & \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
 & & & & & & \widetilde{a}_{nn}x_n & = & \widetilde{b}_n,
\end{array}$$

где

$$\widetilde{a}_{11} \neq 0, \quad \widetilde{a}_{22} \neq 0, \quad \dots, \quad \widetilde{a}_{nn} \neq 0.$$

В этом случае система имеет единственное решение и называется *определенной*. Значения неизвестных вычисляются последовательно. Из последнего уравнения находим: $x_n = \dfrac{\widetilde{b}_n}{\widetilde{a}_{nn}}$. Подставляя это значение в предпоследнее уравнение, находим значение x_{n-1}, и так далее до вычисления значения неизвестной x_1 из первого уравнения.

2. Число уравнений преобразованной системы меньше числа неизвестных, то есть система преобразуется к виду:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\widetilde{a}_{11}x_1 & + & \widetilde{a}_{12}x_2 & + & \cdots & + & \widetilde{a}_{1k}x_k & + & \cdots & + & \widetilde{a}_{1n}x_n & = & \widetilde{b}_1, \\
 & & \widetilde{a}_{22}x_2 & + & \cdots & + & \widetilde{a}_{2k}x_k & + & \cdots & + & \widetilde{a}_{2n}x_n & = & \widetilde{b}_2, \\
 & & & \multicolumn{10}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
 & & & & & & \widetilde{a}_{kk}x_k & + & \cdots & + & \widetilde{a}_{kn}x_n & = & \widetilde{b}_k,
\end{array}$$

где

$$k < n, \quad \widetilde{a}_{11} \neq 0, \quad \widetilde{a}_{22} \neq 0, \quad \dots, \quad \widetilde{a}_{kk} \neq 0.$$

В этом случае система имеет бесконечное множество решений и называется *неопределенной*. Формулы, содержащие все решения системы, могут быть получены следующим образом. В каждом уравнении слагаемые, содержащие переменные с номерами, большими чем k, переносятся в правую часть. Этим переменным придаются произвольные постоянные значения:

$$x_{k+1} = c_{k+1}, \quad x_{k+2} = c_{k+2}, \quad \ldots \quad x_n = c_n.$$

После этого, как и в первом случае, последовательно находятся значения $x_k, x_{k-1}, \ \ldots \ x_1$ как выражений, зависящих от произвольных значений постоянных $c_{k+1}, \ \ldots \ c_n$.

На практике удобнее производить преобразования не над системой, а над *расширенной матрицей* системы уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

состоящей из коэффициентов при неизвестных и столбца свободных членов. Каждому из первых пяти описанных выше преобразований системы соответствует элементарное преобразование над строками расширенной матрицы, а шестому преобразованию соответствует перестановка двух столбцов матрицы, в число которых не может входить столбец свободных членов. Очевидно, что по расширенной матрице легко восстанавливается система линейных уравнений, если в процессе преобразований не переставлялись столбцы. В случае использования последнего преобразования восстанавливать систему уравнений следует с учетом информации о том, какие из столбцов коэффициентов при переменных менялись местами.

Вопрос о совместности системы линейных уравнений и числе решений может быть решен с помощью сравнения рангов матрицы системы и расширенной матрицы. Если ранги этих матриц не равны (одно из уравнений имеет нулевые коэффициенты при неизвестных и свободный член, отличный от нуля), то система несовместна. Если матрицы имеют один и тот же ранг и это число равно числу неизвестных, то система имеет единственное решение. Если же число, равное рангу матриц, меньше числа неизвестных в системе, то она имеет бесконечное множество решений. Неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются *базисными переменными*. Остальные неизвестные - *свободные переменные*.

Пример 12. Решить систему линейных уравнений.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & = & 2, \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 3, \\ 9x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 4. \end{array}$$

Выписываем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки, затем, умножая элементы первой строки на (-3), прибавим к элементам третьей строки. Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right).$$

Вычеркиваем третью строку, поскольку она пропорциональна второй, и матрица приобретает вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Для того чтобы получить ненулевой элемент на главной диагонали во второй строке, переставим местами второй и третий столбцы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Система линейных уравнений, соответствующая полученной расширенной матрице, с учетом перестановки переменных x_2 и x_3 имеет следующий вид:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 5x_3 & - & 2x_2 & + & 4x_4 & = & 2, \\ & - & 6x_3 & & & - & 5x_4 & = & -1. \end{array}$$

В полученной системе имеются два уравнения и четыре неизвестных. Следовательно, две переменные (x_1 и x_3) являются базисными, а переменные x_2 и x_4 – свободными. Придадим свободным переменным произвольные значения

$$x_2 = c, \quad x_4 = d$$

и перенесем соответствующие им слагаемые в правые части уравнений:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 5x_3 & = & 2 & + & 2c & - & 4d, \\ & - & 6x_3 & = & -1 & & & + & 5d. \end{array}$$

Из последнего уравнения находим выражение для базисной переменной x_3:

$$x_3 = \frac{1-5d}{6}.$$

Подставляя это выражение для x_3 в первое уравнение, находим выражение для базисной переменной x_1:

$$\begin{aligned}
3x_1 &= 2+2c-4d-\frac{5}{6}(1-5d) = \\
&= \frac{1}{6}(12+12c-24d-5+25d) = \\
&= \frac{1}{6}(7+12c+d); \\
x_1 &= \frac{1}{18}(7+12c+d).
\end{aligned}$$

Итак, исходная система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений, которое задается формулами:

$$x_1 = \frac{7+12c+d}{18}; \quad x_2 = c; \quad x_3 = \frac{1-5d}{6}; \quad x_4 = d,$$

где c и d - произвольные числа.

3.Векторы

Напомним, что *n-мерным вектором* называется упорядоченная совокупность из n чисел: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *координатами* вектора. При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число. Для n-мерных векторов определены операции сложения и вычитания. При этом складываются или вычитаются соответствующие координаты этих векторов.

Множество всех n-мерных векторов образует *n-мерное векторное пространство*, которое обозначается $\mathbf{R^n}$. Заметим, что при $n = 1, n = 2, n = 3$ пространство $\mathbf{R^n}$ допускает геометрическую интерпретацию, а именно: это множество векторов на прямой, на плоскости и в пространстве, соответственно. Мы рассматривали эти векторы в разделе I.

Вектор, все координаты которого равны нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\mathbf{0}$.

Пусть $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, ..., \mathbf{a}^k$ - некоторый набор n-мерных векторов,
а c_1,c_2, ...,c_k – любые числа. Составим n-мерный вектор

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}^1 + c_2\mathbf{a}^2 + ... + c_k\mathbf{a}^k,$$

который называется *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{a}^1$,$\mathbf{a}^2$, ..., $\mathbf{a}^k$ с коэффициентами $c_1, c_2, ..., c_k$. В частности, линейная комбинация может оказаться равной нулевому вектору, например, если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Для некоторых наборов векторов, однако, равенство их линейной комбинации нулевому вектору возможно не только при нулевых коэффициентах.

Пример 13. Пусть даны два трехмерных вектора:

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Их линейная комбинация с коэффициентами $c_1 = 3$, $c_2 = -2$ равна нулевому вектору:

$$c_1\mathbf{a}^1 + c_2\mathbf{a}^2 = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Если

$$\mathbf{b}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то равенство их линейной комбинации нулевому вектору возможно только при нулевых коэффициентах. Действительно, если

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{то есть} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ и, следовательно,} \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Система векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, ...\mathbf{a}^k$ пространства $\mathbf{R}^n$ называется *линейно зависимой*, если равенство

$$c_1\mathbf{a}^1 + c_2\mathbf{a}^2 + ... + c_k\mathbf{a}^k = \mathbf{0}$$

возможно при условии, что не все коэффициенты линейной комбинации в левой части равны нулю. Если же такое равенство возможно только тогда, когда все коэффициенты равны нулю, система векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, ...\mathbf{a}^k$ называется *линейно независимой*.

Критерий линейной зависимости или независимости системы векторов состоит в следующем: если ранг матрицы, составленной из координат всех векторов системы, равен числу векторов, то данная система векторов линейно независима, если же ранг этой матрицы меньше числа векторов, то система линейно зависима.

Пример 14. Выделить максимальный по числу векторов набор линейно независимых векторов из данной системы векторов

$$\mathbf{a^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a^2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a^3} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a^4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу из координат заданных векторов и вычислим ее ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \qquad r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

(см. пример 11). Так как ранг матрицы меньше числа векторов, то заданная система векторов линейно зависима. Поскольку $r(A) = 3.$, то максимальный по числу векторов набор линейно независимых векторов должен содержать три вектора. Векторы $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^4$ — линейно зависимы. Линейно независимыми наборами векторов будут $\left\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\right\}$, $\left\{\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4\right\}$, и $\left\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^3, \mathbf{a}^4\right\}$.

4. Экономическая интерпретация действий над матрицами

При построении математических моделей экономических отношений используются различные разделы математики, в частности линейная алгебра. Приведем примеры возможного описания экономических понятий в математических терминах, а затем рассмотрим задачу учебного характера.

Пусть имеется n видов товара, причем известна цена p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ товара каждого вида и количество x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ приобретенного товара. Запишем эти данные в виде матриц - столбцов (векторов):

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Стоимость всех приобретенных товаров можно представить в виде произведения (скалярного произведения):

$$P^T X = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Немного усложним задачу. Допустим, что товары данного вида приобрели k покупателей. Введем обозначения: $x_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k)$ – количество товара i-го вида, приобретенного j-м покупателем, и построим матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ik} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Элементы $x_{i\,j}$ j-го столбца матрицы X равны количеству товаров i-го вида, приобретенных j-м покупателем, а элементы i-й строки равны количеству товаров i-го вида, приобретенных различными покупателями. Следовательно, в столбце j указаны объемы различных товаров, приобретенных j-м покупателем, а в строке i — объемы товара i, приобретенные различными покупателями. Произведение $P^T X$ является вектором - строкой, координаты которого соответствуют затратам каждого покупателя.

Матрицу X (13) можно интерпретировать не только как матрицу покупок, а, например, как матрицу продаж. Пусть четыре поставщика реализовали три вида строительных материалов (доски, краску, олифу) по ценам: 1500 денежных единиц за 1 м^3 досок, 5 денежных единиц и 2 денежные единицы за 1 кг краски и олифы, соответственно. Первый поставщик продал 20 м^3 досок, 100 кг краски и 20 кг олифы. Второй - 25 м^3, 60 кг, 20 кг, соответственно. Третий продал 180 кг краски и 30 кг олифы. Четвертый - 30 м^3 досок и 10 кг олифы. В предложенных обозначениях

$$P = \begin{pmatrix} 1500 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 0 & 30 \\ 100 & 60 & 80 & 0 \\ 20 & 10 & 30 & 10 \end{pmatrix}$$

Тогда произведение $P^T X$ является вектором, координаты которого равны выручке соответствующего поставщика.

$$P^T X = \begin{pmatrix} 1500, & 5, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 25 & 0 & 30 \\ 100 & 60 & 80 & 0 \\ 20 & 10 & 30 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 30540, & 37820, & 1020, & 45020 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, выручка первого поставщика составляет 30540 денежных единиц, второго - 37820, третьего - 1020, четвертого - 45020.

Рассмотрим еще один модельный пример. Пусть производится n видов продукции, для чего используется m видов ресурсов (под ресурсами понимается сырье, электроэнергия, время работы оборудования, трудозатраты и т.д.). Известны значения величин: $a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n;)$ – количество ресурса i-го вида, необходимое для производства единицы продукции j-го вида (в зависимости от условий задачи единицей продукции могут быть штуки изделий, единицы веса, объема и т.д.); а также $b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ – объем затраченного ресурса i-го вида. Введем обозначения: $x_j\,(j = 1, 2, \dots, n)$ – количество производимой продукции j-го вида. Построим матрицу затрат A, вектор ресурсов B и вектор выпуска X:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

В матрице $A = (a_{ij})$ элементы, например, <u>первой строки</u> представляют собой затраты <u>ресурса</u> <u>первого вида</u> на производство единицы **изделий первого** (a_{11}), **второго** (a_{12}),..., **n-го** (a_{1n}) **вида**. Соответственно, элементы i-й строки равны расходам ресурса i-го вида, истраченного на изготовление единицы изделия соответствующего вида. Аналогично элементы, например, **первого столбца** обозначают расходы соответствующих ресурсов на одно **изделие первого вида**. Тогда соотношение между израсходованными ресурсами и произведенной продукцией можно записать в виде равенства

$$AX = B, \tag{14}$$

которое равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_m & = & b_m. \end{array} \right. \tag{15}$$

Зная матрицу A и вектор b_i, количество произведенной продукции каждого вида найдем, решив систему (15).

Пример. На производство двух видов вязаных изделий (свитеров и костюмов) предприятие израсходовало 62 кг шерсти и 32 кг пана. При выполнении заказа вязальные машины работали 170 часов. На изготовление одного свитера расходуется 0.5 кг шерсти, 0.2 кг пана и 1.5 часа работы вязальной машины. Для одного костюма эти данные соответственно таковы: 0.8 кг, 0.5 кг, 2 часа. Найти количество выпущенных свитеров и костюмов.

Решение. Составим матрицу затрат A, вектор ресурсов B и вектор выпуска X:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.2 & 0.5 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 62 \\ 32 \\ 170 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Здесь введены обозначения: x_1 – число связанных свитеров, а x_2 – число связанных костюмов. Отметим, что числа, стоящие в первом и во втором столбцах матрицы A, – затраты ресурсов на изготовление одного свитера и одного костюма, соответственно. Подставив (16) в (14), получим

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.2 & 0.3 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 32 \\ 170 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Равенство (17) равносильно системе:

$$\begin{cases} 0.5x_1 & + & 0.8x_2 & = & 62, \\ 0.2x_1 & + & 0.5x_2 & = & 32, \\ 1.5x_1 & + & 2.0x_2 & = & 170. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем вектор выпуска продукции. Применяя метод Гаусса, получим

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.5 & 0.8 & 62 \\ 0.2 & 0.5 & 32 \\ 1.5 & 2 & 170 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0.5 & 0.8 & 62 \\ 0.2 & 0.5 & 32 \\ 0 & -0.4 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0.1 & -0.2 & -2 \\ 0.2 & 0.5 & 32 \\ 0 & -0.4 & -16 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0.1 & -0.2 & -2 \\ 0 & 0.9 & 36 \\ 0 & 0.4 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0.1 & -0.2 & -2 \\ 0 & 0.9 & 36 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тогда имеем

$$x_2 = 40; \quad 0.1x_1 - 0.2 \times 40 = -2 : \quad 0.1x_1 = 6; \quad x_1 = 60.$$

Ответ: было выпущено 60 свитеров и 40 костюмов.

Замечание: Рассмотренная система имеет единственное решение (определенная система). При других данных возможен иной вариант решения. Например, если в данной задаче число видов выпускаемых изделий будет больше трех, то система будет либо несовместной, либо неопределенной. Несовместность системы означает, что не существует такого вектора выпуска, при котором все запасы ресурсов израсходованы полностью; неопределенность означает, что существует множество планов выпуска. В последнем случае, выбирая соответствующим образом значения свободных переменных, можно найти конкретное решение, которое удовлетворяет какому-нибудь дополнительному условию. Таким условием, например, может быть получение наибольшего дохода от реализации выпущенных изделий. Подобные задачи рассматриваются в курсе линейного программирования на втором году обучения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. 4-е изд.- М., 1975.

2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. 3-12 изд.-М., 1955-1975.

3. Ефимов И.В. Краткий курс аналитической геометрии. 6-12 изд.-М., 1961-1975.

4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. 2-12 изд.-М., 1951-1975.

5. Кропотов А.И. Элементы линейной алгебры: Учеб. пособие.- Л.: ЛФЭИ, 1990.

5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. 2-е изд.- М.: Айрис пресс, 2003.

Студент должен выполнить контрольную работу, содержащую пять задач. Номер варианта контрольной работы соответствует последней цифре номера зачетной книжки. Номера задач каждого варианта приведены в таблице.

Номер варианта	Номера задач				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
10	10	20	30	40	50

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

I.Аналитическая геометрия и элементы векторной алгебры

1-10. Даны вершины четырехугольника $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, $D(x_D; y_D)$ и точка $M(x_M; y_M)$.

1) Доказать, что четырехугольник $ABCD$ является трапецией.

2) Найти уравнение высоты, проведенной из вершины B на основание AD.

3) Найти уравнение средней линии трапеции.

4) Вычислить длину средней линии трапеции.

5) Выяснить, лежат ли точки $O(0; 0)$ и $M(x_M; y_M)$ по одну или по разные стороны от средней линии трапеции.

6) Найти вектор $\vec{d} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

7) Найти косинус угла трапеции при вершине A.

1. $A(-5; 0)$;	$B(1; 1)$;	$C(4; -2)$;	$D(1; -6)$;	$M(3; 3)$;
2. $A(1; 1)$;	$B(7; 2)$;	$C(12; -3)$;	$D(10; -8)$;	$M(10; 5)$;
3. $A(-4; -7)$;	$B(-2; -2)$;	$C(4; 0)$;	$D(5; -4)$;	$M(2; -1)$;
4. $A(-4; -5)$;	$B(-2; 4)$;	$C(4; 6)$;	$D(5; -2)$;	$M(2; -2)$;
5. $A(-5; 5)$;	$B(0; 4)$;	$C(2; -1)$;	$D(-1; -5)$;	$M(5; 5)$;

6. $A(2;-4)$; $B(3;2)$; $C(7;5)$; $D(10;2)$; $M(8;-5)$;
7. $A(-3;-6)$; $B(-1;1)$; $C(3;3)$; $D(5;-2)$; $M(-2;5)$;
8. $A(2;-5)$; $B(-1;1)$; $C(0;4)$; $D(6;7)$; $M(5;2)$;
9. $A(-7;-1)$; $B(1;1)$; $C(4;-2)$; $D(2;-10)$; $M(5;4)$;
10$A(-6;5)$; $B(0;4)$; $C(2;-1)$; $D(-2;-5)$; $M(4;5)$;

11-20. Решить матричное уравнение.

11. $AX = B$; где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ -7 & -4 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$;

12. $XA = B$; где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 11 \\ 13 & 4 & 15 \end{pmatrix}$;

13. $AX = B$; где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 15 \\ 6 & 33 \end{pmatrix}$;

14. $XA = B$; где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -12 \\ -4 & -10 & 13 \end{pmatrix}$;

15. $AX = B$; где $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 27 & 12 \\ -1 & -6 \\ 20 & 6 \end{pmatrix}$;

16. $XA = B$; где $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -13 & 21 \\ 7 & -8 & 2 \end{pmatrix}$;

17. $AX = B$; где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ -2 & 0 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$;

18. $XA = B$; где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 11 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

19. $AX = B$; где $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 12 & 5 \\ 15 & -6 \end{pmatrix}$;

20. $XA = B$; где $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -17 \\ 4 & -19 & 29 \end{pmatrix}$;

21-30. Исследовать и решить систему уравнений.

21. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 8x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 9x_4 = -1, \\ -x_1 + 9x_2 - 28x_3 + 19x_4 = 1; \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 9x_4 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 9x_4 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 20; \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 7, \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 3; \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 12x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 9, \\ -x_1 - 11x_2 + 13x_3 + 33x_4 = 6, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -17; \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 12x_4 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 6, \\ -x_1 + 5x_3 - 13x_4 = -15, \\ 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 25x_4 = 10; \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 10x_4 = -11, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -8; \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = -5, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 3x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2; \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -9, \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 12, \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 9x_2 - 10x_3 - 9x_4 = -3; \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 14x_4 = -11, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 17, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 6; \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = -9, \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 - 4x_4 = -11, \\ -4x_1 + 7x_2 - 10x_3 - 7x_4 = -2, \\ -6x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 20; \end{cases}$$

31-40. Среди данных векторов найти максимальный по числу векторов набор линейно независимых.

31. $\mathbf{a}_1(1;0;3;-2)$, $\mathbf{a}_2(3;2;0;5)$, $\mathbf{a}_3(-1;3;-4;0)$, $\mathbf{a}_4(0;-3;1;3)$, $\mathbf{a}_5(1;8;-8;5)$,

32. $\mathbf{a}_1(2;-3;1;-1)$, $\mathbf{a}_2(0;2;3;1)$, $\mathbf{a}_3(1;0;2;4)$, $\mathbf{a}_4(-1;3;0;-2)$, $\mathbf{a}_5(1;6;1;-7)$,

33. $\mathbf{a}_1(1;0;3;-1)$, $\mathbf{a}_2(0;2;-1;2)$, $\mathbf{a}_3(2;3;0;3)$, $\mathbf{a}_4(-1;3;4;0)$, $\mathbf{a}_5(-5;-3;4;-6)$,

34. $\mathbf{a}_1(-1;2;3;-4)$, $\mathbf{a}_2(5;0;-2;1)$, $\mathbf{a}_3(0;3;-1;2)$, $\mathbf{a}_4(-4;1;0;-3)$, $\mathbf{a}_5(1;1;-2;-2)$,

35. $\mathbf{a}_1(1;2;0;-3)$, $\mathbf{a}_2(-2;1;3;0)$, $\mathbf{a}_3(-3;0;4;-5)$, $\mathbf{a}_4(2;-3;-2;0)$, $\mathbf{a}_5(-1;-3;2;-5)$,

36. $\mathbf{a}_1(0;1;-2;3)$, $\mathbf{a}_2(-1;0;3;-2)$, $\mathbf{a}_3(2;3;-1;0)$, $\mathbf{a}_4(-1;-2;0;3)$, $\mathbf{a}_5(0;2;1;11)$,

37. $\mathbf{a}_1(-1;0;3;-2)$, $\mathbf{a}_2(2;1;-1;0)$, $\mathbf{a}_3(4;-1;-2;3)$, $\mathbf{a}_4(0;2;3;-4)$, $\mathbf{a}_5(6;0;-3;3)$,

38. $\mathbf{a}_1(1;0;3;-2)$, $\mathbf{a}_2(0;-1;2;4)$, $\mathbf{a}_3(3;1;-1;0)$, $\mathbf{a}_4(-5;-1;0;4)$, $\mathbf{a}_5(1;1;-7;4)$,

39. $\mathbf{a}_1(3;-1;0;4)$, $\mathbf{a}_2(-1;2;3;0)$, $\mathbf{a}_3(2;-1;3;5)$, $\mathbf{a}_4(-1;0;-4;-3)$, $\mathbf{a}_5(-4;1;3;-3)$,

40. $\mathbf{a}_1(1;-1;3;0)$,
$\mathbf{a}_2(0;2;-2;3)$,
$\mathbf{a}_3(2;1;-1;2)$,
$\mathbf{a}_4(-4;-2;0;-3)$,
$\mathbf{a}_5(-9;-2;-4;0)$.

41-50. Задача. Предприятие выпускает 4 вида продукции, используя 5 видов сырья. Известна матрица затрат A и вектор ресурсов B. Найти вектор выпуска X.

41. $$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \\ 30 \\ 22 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

42. $$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \\ 11 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 42 \\ 34 \\ 70 \\ 35 \\ 111 \end{pmatrix}.$$

43. $$A = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 3 & 4 \\ 9 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 12 & 3 \\ 4 & 10 & 13 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 58 \\ 62 \\ 41 \\ 32 \\ 69 \end{pmatrix}.$$

44. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & 5 & 5 & 9 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 9 & 5 \\ 12 & 8 & 10 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 62 \\ 62 \\ 36 \\ 48 \\ 84 \end{pmatrix}.$$

45. $$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 47 \\ 31 \\ 37 \\ 47 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

46. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 13 \\ 12 & 2 & 8 & 7 \\ 11 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 8 & 15 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 56 \\ 67 \\ 65 \\ 35 \\ 89 \end{pmatrix}.$$

47. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 57 \\ 37 \\ 61 \\ 68 \\ 87 \end{pmatrix}.$$

48. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 21 \\ 47 \\ 41 \\ 21 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

49. $$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 30 \\ 62 \\ 45 \\ 29 \\ 42 \end{pmatrix}.$$

50. $$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 19 \\ 37 \\ 28 \\ 34 \\ 44 \end{pmatrix}.$$