Рекомендовано научно-методическим советом университета

Методические указания и контрольные задания по курсу высшей математики «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов заочной формы обучения. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2007. – 28 с.

Методические указания содержат программу раздела высшей математики «Теория вероятностей и математическая статистика», список необходимой для изучения материала литературы, рекомендации для выполнения контрольной работы, решения некоторых задач контрольной работы и варианты контрольных заданий.

Предназначены для студентов заочного факультета.

Составители: канд. экон. наук, ст. преп. **Ю.Г. Ермаченко**
канд. экон. наук, доц. **А.И. Лосев**
ст. преп. **Ю.В. Молчанова**

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. *В.Ю. Дорофеев*

Учебная программа по курсу высшей математики. Раздел «Теория вероятностей и математическая статистика»

- Случайные события

Предмет теории вероятностей и ее значение для экономической науки. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Понятие случайного события.

Частота события, ее свойства. Аксиомы теории вероятностей. Простейшие следствия из аксиом.

Классическое и геометрическое определения вероятности случайного события. Комбинаторика.

Теорема сложения вероятностей. Условная вероятность события. Формула умножения вероятностей. Независимые события.

Формула полной вероятности и формула Байеса.

Схема Бернулли. Формула Бернулли. Теоремы Муавра-Лапласа.

- Случайные величины

Понятие случайной величины. Дискретные случайные величины (ДСВ). Ряд распределения.

Математическое ожидание ДСВ, его вероятностный смысл. Свойства математического ожидания случайной величины.

Дисперсия случайной величины, ее свойства. Среднее квадратическое отклонение. Моменты случайных величин.

Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Независимые случайные величины. Системы случайных величин.

Непрерывные случайные величины (НСВ). Функция распределения случайной величины, ее свойства. Плотность распределения вероятности случайной величины, ее свойства.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение НСВ. Равномерное распределение. Нормальное распределение. Мода, медиана, асимметрия, эксцесс. Правило трех стандартов.

Статистическое распределение нескольких случайных величин. Корреляционный момент и коэффициент корреляции. Статистическая зависимость. Функция регрессии.

- Закон больших чисел

Понятие о законе больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли. Понятие о теореме Ляпунова.

- Основы выборочного метода и элементы статистический теории оценивания

Генеральная и выборочная совокупности. Вариационный ряд, интервальный вариационный ряд. Полигон, гистограмма. Выборочная функция распределения.

Точечное оценивание параметров распределения. Несмещенность, состоятельность и эффективность оценки. Выборочная средняя как оценка генеральной средней. Оценка генеральной дисперсии.

Интервальное оценивание параметров распределения. Доверительный интервал и доверительная вероятность. Интервальное оценивание генеральной средней и генеральной дисперсии.

- Статистическое исследование зависимостей

Корреляционный и регрессионный анализ. Корреляционная таблица. Выборочный коэффициент корреляции.

Построение выборочных линейных уравнений регрессии. Экономические примеры.

- Методы статистической проверки гипотез

Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Критерий проверки статистической гипотезы, критическая область. Ошибки первого и второго рода, уровень значимости. Понятие о критерии согласия. Мощность критерия. Критерий согласия Пирсона.

Рекомендуемая литература

1. Солодовников А.С. Теория вероятностей. – М.: Просвещение, 1983.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1997.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.
4. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. – М.: Просвещение, 1976.
5. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1982.
6. Венцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.
7. Свешников А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. – М.: Наука, 1970.
8. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Минск: Высшая школа, 1975.

9. Методические указания и контрольные домашние задания по теме «Случайные события» / Сост. Авдушева Н.Е., Варфоломеева Г.Б., Ключикова О.А. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006.
10. Методические указания по курсу высшей математики. Раздел «Теория вероятностей и математическая статистика. Аксиомы теории вероятностей». – Л.: Изд-во ЛФЭИ, 1990.
11. Гаштольд Л.П., Авдушева Н.Е. Случайные события и их вероятности. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2001.
12. Ковбаса С.И., Ивановский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – СПб.: Альфа, 2001.

Общие правила выполнения и оформления контрольной работы

В III семестре студенты изучают раздел «Теория вероятностей и математическая статистика» и выполняют контрольную работу.

Перед выполнением контрольной работы следует изучить теоретический материал этого курса математики по указанной литературе, приобрести навыки решения задач по теме, разобрать решение типовых задач.

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться следующих правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной тетради в клетку, чернилами любого цвета (кроме красного и зеленого), и оставлены поля для замечаний преподавателя.

2. Номер варианта выполняемой контрольной работы студент выбирает в соответствии с последней цифрой номера зачетной книжки.

3. На обложке тетради необходимо указать фамилию, имя, отчество студента, шифр (номер зачетной книжки или студенческого билета), курс, факультет, специальность, по которой студент обучается, его адрес, номер контрольной работы, номер варианта выполняемой работы, название и год издания методических указаний, из которых взято контрольное задание.

4. При выполнении контрольной работы указывается номер решаемой задачи, полностью переписывается ее условие, после чего приводится подробное решение со ссылками на используемые при решении определения, теоремы, формулы. В конце решения указывается ответ. Необходимые чертежи и рисунки выполняются аккуратно. Задачи решаются по порядку их следования в методических указаниях.

5. В контрольной работе должны быть решены все задачи, указанные в задании соответствующего варианта. Контрольные работы, содер-

жащие не все задачи своего варианта или содержащие задачи не своего варианта, не засчитываются.

6. Если в работе имеются ошибки, студент должен исправить их, выполнив все требования преподавателя, изложенные в рецензии. Все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием даты исполнения и номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления. Исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются. После исправления всех ошибок контрольную работу необходимо сдать на повторную проверку.

7. Контрольная работа должна быть выполнена, проверена и зачтена заблаговременно до экзамена.

К экзамену допускаются только те студенты, которые получили положительную оценку за контрольную работу.

Примеры решения задач

Задача 1

Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,9. Имея запас из трех снарядов, ведут стрельбу по цели до первого попадания. Выстрелы считаются независимыми. Найти вероятность следующих событий:

A = (произведено два выстрела),
B = (весь запас снарядов израсходован),
C = (стрельба произведена без промахов),
D = (попадание произошло при первом выстреле),
E = (в запасе осталось не менее одного патрона).

Решение

Рассмотрим события $П$ - попадание при выстреле и $\bar{П}$ - промах. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна $P(П)=0{,}9$. Вероятность промаха при одном выстреле (как вероятность противоположного попаданию события) равна $P(\bar{П})=1-0{,}9=0{,}1$.

Событие A равносильно промаху при первом выстреле и попаданию при втором, т.е. $A=\bar{П}\cdot П$. Выстрелы независимы, поэтому события $П$ и $\bar{П}$ для разных выстрелов также независимы. Откуда $P(A)=P(\bar{П}\cdot П)=P(\bar{П})\cdot P(П)=0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}09$.

Событие B равносильно промаху при первых двух выстрелах независимо от результата третьего выстрела, поэтому
$P(B)=P(\bar{П})\cdot P(\bar{П})=0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}01$.

Событие C означает попадание в цель при первом выстреле и его вероятность равна
$P(C)=P(П)=0{,}9$.

Событие D имеет вероятность, равную вероятности события C.
$P(D)=P(C)=P(П)=0{,}9$.

Событие E равносильно попаданию при первом выстреле (в запасе осталось два патрона) или промаху при первом выстреле и попаданию при втором (в запасе остался один патрон), поэтому
$P(E)=P(П)+P(\bar{П})\cdot P(П)=0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}99.$

Ответ: $P(A)=0{,}09$, $P(B)=0{,}01$, $P(C)=0{,}9$, $P(D)=0{,}9$, $P(E)=0{,}99$.

Задача 2

По линии связи передаются два сигнала А и В соответственно с вероятностями 0,84 и 0,16. Из-за помех $\frac{1}{6}$ сигналов А искажается и принимается как сигнал В, а $\frac{1}{8}$ часть переданных сигналов В принимается как сигнал А.

А) Найти вероятность того, что при приеме появится сигнал А.
Б) Найти вероятность того, что при приеме появится сигнал В.
В) Известно, что принят сигнал А. Какова вероятность, что он же и был передан?

Решение

А) Для решения задачи вспомним формулу полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i),$$

где A - произвольное событие, H_i $i=1,2,\dots,n$ - гипотезы – события, удовлетворяющие условиям: а) $H_1+H_2+\dots+H_n=\Omega$(достоверное событие) – в совокупности гипотезы образуют достоверное событие; б) $H_i\cap H_k=\varnothing$, $i\neq k$ - различные гипотезы попарно несовместны.

Введем гипотезы: H_A - передан сигнал А, H_B - передан сигнал В. Событие A означает принятие сигнала А, событие B - принятие сигнала В. По условию вероятности гипотез равны: $P(H_A)=0{,}84$, $P(H_B)=0{,}16$. Вероятность того, что принят сигнал А, при условии, что он же и послан, $P(A/H_A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Вероятность того, что принят сигнал А при условии, что послан сигнал В, $P(A/H_B)=\frac{1}{8}$. По формуле полной вероятности получим $P(A)=P(H_A)\cdot P(A/H_A)+P(H_B)\cdot P(A/H_B)=0{,}84\cdot\frac{5}{6}+0{,}16\cdot\frac{1}{8}=0{,}72$.

Б) Решение данной задачи аналогично решению задачи а). Введем гипотезы: H_A - передан сигнал А, H_B - передан сигнал В. Событие A означает принятие сигнала А, событие B - принятие сигнала В. По условию вероятности гипотез равны: $P(H_A)=0{,}84$, $P(H_B)=0{,}16$. Вероятность того, что принят сигнал В, при условии, что он же и послан, $P(B/H_B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

Вероятность того, что принят сигнал В, при условии, что послан сигнал А, $P(B/H_A)=\frac{1}{6}$. По формуле полной вероятности получим

$P(B)=P(H_A)\cdot P(B/H_A)+P(H_B)\cdot P(B/H_B)=0{,}84\cdot\frac{1}{6}+0{,}16\cdot\frac{7}{8}=0{,}28$.

В) Вероятность того, что был передан сигнал А при условии, что он же был принят, вычислим по формуле Бейеса:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)},\quad i=\overline{1,n}.$$

$$P(H_A/A)=\frac{P(H_A)P(A/H_A)}{P(A)}=\frac{0{,}84\cdot\frac{5}{6}}{0{,}72}=\frac{35}{36}\approx 0{,}97.$$

Ответ: 0,72; 0,28; 0,97.

Задача 3

Баскетболист попадает мячом в корзину при одном броске с вероятностью $p=0{,}8$. Найти вероятность того, что из пяти бросков ровно в четырех случаях произойдет попадание.

Решение

По формуле Бернулли: $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, $m=\overline{0,n}$. Здесь n - общее число испытаний, m - число испытаний из общего количества исходов, благоприятных искомому событию A. $p=P(A)$, $q=P(\overline{A})$. Имеем: $p=0{,}8$, $q=0{,}2$. Вычислим

$P_5(4)=C_5^4 p^4 q^1=5\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^1=0{,}8^4=0{,}64\cdot 0{,}64=0{,}4096\approx 0{,}41$.

Ответ: 0,41.

Задача 4

Найти вероятность того, что в условиях предыдущей задачи баскетболист попадет в корзину хотя бы два раза.

Решение

В данной задаче событие A - попадание мяча в корзину при отдельном броске. Надо найти вероятность $P_n(m\ge 2)$, $P_5(m\ge 2)=P_5(2)+P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$. Видим, что придется вычислять сумму четырех слагаемых, что невыгодно, т.к. знаем формулу $P_n(<m)=1-P_n(\ge m)$.

$P_5(\ge 2)=1-P_5((2)=1-(P_5(0)+P_5(1))=1-(C_5^0\cdot p^0\cdot q^5+C_5^1\cdot p^1\cdot q^4)=$
$=1-(1\cdot 1\cdot 0{,}2^5+5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^4)=1-(0{,}2^5+4\cdot 0{,}2^4)=1-0{,}2^4\cdot(0{,}2+4)=1-0{,}04^2\cdot 4{,}2=$
$=1-0{,}0672=0{,}9328\approx 0{,}93$.

Ответ: 0,93.

Задача 5

Обычную монету бросили четыре раза.
А) Найти вероятность того, что герб выпал дважды.
Б) Найти вероятность того, что герб выпал не менее двух раз.

Решение

А) Для решения задачи используем формулу Бернулли.
В данной задаче A - выпадение герба при отдельном броске. $p=P(A)=\frac{1}{2}$. $q=P(\overline{A})=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $n=4$; $m=2$. По формуле Бернулли.

$$P_4(2)=C_4^2p^2q^{4-2}=\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}=0{,}375.$$

Б) Событие - герб выпал не менее двух раз при четырех бросках монеты равносильно появлению одного из исходов: герб выпал два раза или герб выпал три раза, или герб выпал все четыре раза.

$$P_4(m\ge 2)=P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=C_4^2p^2q^2+C_4^3p^3q^1+C_4^4p^4q^0=$$
$$=\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4!}{3!(4-3)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\frac{4!}{4!(4-4)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=$$
$$\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{16}=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}=0{,}6875.$$

Ответ: 0, 375; 0,6875.

Задача 6

Ученик штампует детали. Вероятность того, что деталь бракованная – 0,1. Найти вероятность того, что среди 20 деталей окажется ровно 6 бракованных.

Решение

Так как число деталей велико (в таких задачах числа больше 10 считаются большими), воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

$n = 20$, $k = 6$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $P_{20}(6) \approx \frac{1}{\sqrt{20 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} \cdot \varphi(x)$,

$$x = \frac{6-20\cdot 0{,}1}{\sqrt{20\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}} = \frac{6-2}{0{,}3\cdot\sqrt{20}} = \frac{4}{0{,}3\cdot\sqrt{20}} = \frac{4\cdot\sqrt{20}}{0{,}3\cdot 20} = \frac{\sqrt{20}}{0{,}3\cdot 5} = \frac{10\cdot\sqrt{20}}{3\cdot 5} = \frac{2\cdot\sqrt{20}}{3} \approx 2{,}98,$$

$P_{200}(16) \approx \frac{1}{1{,}07} \cdot \varphi(2{,}98) = 0{,}745 \cdot 0{,}0047 \approx 0{,}0035$.

Ответ: 0,0035.

Задача 7

Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена от 75 до 100 раз.

Решение

Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа: $P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_2 = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$; $x_1 = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$ для решения данной задачи.

Имеем: $n = 100$, $k_1 = 75$, $k_2 = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 1-p = 0{,}2$,

$$P_{100}(75 \le k \le 100) = \Phi\left(\frac{100-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) = \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{100\cdot 0{,}16}}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{\sqrt{100\cdot 0{,}16}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{20}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{4}\right) = \Phi(5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}499999 + 0{,}3944 = 0{,}894399 \approx 0{,}89.$$

Ответ: 0,89.

Задача 8

На пути движения автомашины четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальней-

шее движение. Составить закон распределения случайной величины X – числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

Решение

Случайная величина X – число светофоров, пройденных автомашиной без остановки, может принимать значения: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Вероятности, соответствующие данным значениям: $p_i = P(X = x_i)$.

$p_0 = P(X = x_0)$ - автомашина пройдет 0 светофоров без остановки (встанет на первом светофоре), $p_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$p_1 = P(X = x_1)$ - автомашина пройдет 1 светофор без остановки (первый светофор пройдет без остановки и встанет на втором), $p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$p_2 = P(X = x_2)$ - автомашина пройдет 2 светофора без остановки (первые два светофора пройдет без остановки и встанет на третьем), $p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

$p_3 = P(X = x_3)$ - автомашина пройдет 3 светофора без остановки (первые три светофора пройдет без остановки и встанет на четвертом), $p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

$p_4 = P(X = x_4)$ - автомашина пройдет 4 светофора без остановки (все светофоры пройдет без остановки), $p_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$M(X) = \sum_{i=0}^{4} x_i \cdot p_i = 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375.$$

$$D(X) = \sum_{i=0}^{4}(x_i - M(X))^2 p_i = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 p_i - (M(X))^2 = \left(0^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot\frac{1}{8} + 3^2\cdot\frac{1}{16} + 4^2\cdot\frac{1}{16}\right) - \left(\frac{15}{16}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{8} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16} - \frac{225}{256} = \frac{367}{256} = 1\frac{111}{256} = 1{,}43359.$$

Ответ: 0,9375; 1,43359.

Задача 9

Плотность распределения непрерывной случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}0\ ,\ x\le\frac{\pi}{6},\\ a\cdot\sin(3x)\ ,\ при\ x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right],\\ 0\ ,\ x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}$

Найти $a,\ M(X),\ D(X),\ F(x),\ P\left(\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение

Параметр a найдем из формулы основного свойства плотности вероятности: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$. Подставляем в это равенство заданную плотность распределения, учитывая, что ненулевой она является только на промежутке от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$.

$$1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}a\cdot\sin(3x)dx=a\cdot\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin(3x)dx=a\cdot\left(\frac{-\cos(3x)}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{a}{3}\left(\cos\pi-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=-\frac{a}{3}\cdot(-1)=\frac{a}{3}.\qquad 1=\frac{a}{3},\quad a=3.$$

Математическое ожидание найдем по формуле: $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx$. Снова учитывая, что $f(x)\neq0$ только на полуинтервале $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]$, получаем

$$M(X)=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x\cdot3\cdot\sin(3x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x\cdot\sin(3x)d(3x)=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x\cdot d(-\cos(3x))=$$

$$=x\cdot(-\cos(3x))\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(-\cos(3x))dx=-x\cdot\cos(3x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos(3x)dx=-\left(\frac{\pi}{3}\cos\pi-\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-\left(\frac{\pi}{3}\cdot(-1)-0\right)+\frac{1}{3}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=-\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot(0-1)=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}=\frac{\pi-1}{3}.$$

Для вычисления дисперсии используем не определение $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))\cdot f(x)\cdot dx$, а рабочую формулу для вычисления $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.

Математическое ожидание уже сосчитали, $M(X)=\frac{\pi-1}{3}$. Вычислим $M(X^2)$ по формуле $M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx$.

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x^2\cdot3\cdot\sin(3x)dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x^2\cdot d(-\cos(3x))=$$

$$=x^2\cdot(-\cos(3x))\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(-\cos(3x))dx^2=-x^2\cdot\cos(3x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos(3x)\cdot2xdx=$$

$$=-\left(\frac{\pi^2}{9}\cos\pi-\frac{\pi^2}{36}\cos\frac{\pi}{2}\right)+2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x\cdot d\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)=$$

$$=-\left(\frac{\pi^2}{9}\cdot(-1)-0\right)+\frac{2}{3}\left(x\cdot\sin(3x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin(3x)dx\right)=\frac{\pi^2}{9}+\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}\sin\pi-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{\cos(3x)}{3}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\pi^2}{9}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\cdot\sin\pi-\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{\cos(3x)}{3}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{9}+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3}\cdot0-\frac{\pi}{6}\cdot1\right)+\frac{2}{9}\cdot\left(\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{9}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{2}{9}(-1-0)=\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi}{9}-\frac{2}{9}=\frac{\pi^2-\pi-2}{9}.$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{\pi^2-\pi-2}{9}-\left(\frac{\pi-1}{3}\right)^2=\frac{\pi^2-\pi-2}{9}-\frac{\pi^2-2\pi+1}{9}=\frac{\pi-3}{9}.$$

Функцию распределения найдем по формуле: $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)dt$.

Если $x<0$, то $f(x)=0$ и $F(x)=0$.

Если $\frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3}$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)\cdot dt=\int\limits_{-\infty}^{\pi/6}f(t)\cdot dt+\int\limits_{\pi/6}^{x}3\cdot\sin(3t)\cdot dt=-\cos(3t)\ \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{x}=-\cos(3x)$.

Если $x>\frac{\pi}{3}$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)\cdot dt=\int\limits_{-\infty}^{\pi/6}f(t)\cdot dt+\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}f(t)\cdot dt+\int\limits_{\pi/3}^{+\infty}f(t)\cdot dt=1$.

$$F(x)=\begin{cases}0\ ,\ x\le\frac{\pi}{6},\\ \int\limits_{-\infty}^{x}3\cdot\sin(3x)dx\ ,\ \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3},\\ 1\ ,\ x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}=\begin{cases}0\ ,\ x\le\frac{\pi}{6},\\ -\cos(3x)\ ,\ \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3}.\\ 1\ ,\ x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Найдем вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.

$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$, $\qquad P(\frac{\pi}{12}<X<\frac{\pi}{4})=F(\frac{\pi}{4})-F(\frac{\pi}{12})=-\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)-0=$

$-\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)=-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7$.

Ответ: $\quad a=3,\qquad M(X)=\frac{\pi-1}{3},\qquad D(X)=\frac{\pi-3}{9},\qquad P(\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{4})=0{,}7$,

$$F(x)=\begin{cases}0\ ,\ x\le\frac{\pi}{6},\\ -\cos(3x)\ ,\ \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3}.\\ 1\ ,\ x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Задача 10

Найти коэффициент корреляции между величинами X и Y и уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y.

$X=(39,\ 29,\ 56,\ 13,\ 37)$,

$Y=(31,\ 21,\ 50,\ 15,\ 30)$,

Y - экспорт радиоэлектронной продукции из США в год за 5 лет (в млн долл.),

X - потребление этой продукции за год в расчете на одну семью за 5 лет.

Решение

Напишем уравнение линейной регрессии с.в. Y на с.в. X:

$y-\bar{y}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\bar{x})$, где $\bar{y}$ - средневзвешенное значение случайной величины Y,

$\bar{x}$ - средневзвешенное значение случайной величины X, $\sigma_y=\sqrt{D(Y)}$, $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$, где $D(Y)=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$, $D(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ - дисперсии случайных величин X и Y, $\sigma_y=\sqrt{D(Y)}$.

Вычислим $\bar{x}$ по формуле: $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$.

$\bar{x}=\frac{39+29+56+13+37}{5}=\frac{174}{5}=34{,}8$. $\qquad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+...+y_n}{n}=\frac{31+21+50+15+30}{5}=29{,}4$.

Дисперсию $D(X)$ удобнее считать по вычислительной формуле: $D(X)=\overline{x^2}-(\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$.

$\overline{x^2}=\frac{39^2+29^2+56^2+13^2+37^2}{5}=\frac{1521+841+3136+169+1369}{5}=1407{,}2$.

$D(X)=1407{,}2-1211{,}04=196{,}16$.

$D(Y)=\overline{y^2}-(\bar{y})^2$; $\quad \overline{y^2}=\frac{31^2+21^2+50^2+15^2+30^2}{5}=\frac{961+441+2500+225+900}{5}=1005{,}4$;

$D(Y)=1005{,}4-864{,}36=141{,}04$; $\quad \sigma_x=\sqrt{D(X)}=14{,}00571312$; $\quad \sigma_y=\sqrt{D(Y)}=11{,}87602627$.

Коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y вычислим по формуле:

$$r_{xy}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}m_{ij}\cdot x_i\cdot y_j-n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}}{n\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y}.$$

$$r_{xy}=\frac{39\cdot31+29\cdot21+56\cdot50+13\cdot15+37\cdot30-5\cdot34{,}8\cdot29{,}4}{5\cdot14{,}00571312\cdot11{,}87602627}=\frac{807{,}4}{831{,}6610847}=0{,}97.$$

Полученные данные подставим в уравнение регрессии случайной величины Y на X.

$y-\bar{y}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\bar{x})$; $\quad y-29{,}4=0{,}97\cdot\frac{11{,}88}{14{,}01}(x-34{,}8)$; $\quad y\approx0{,}82\cdot x+0{,}75$.

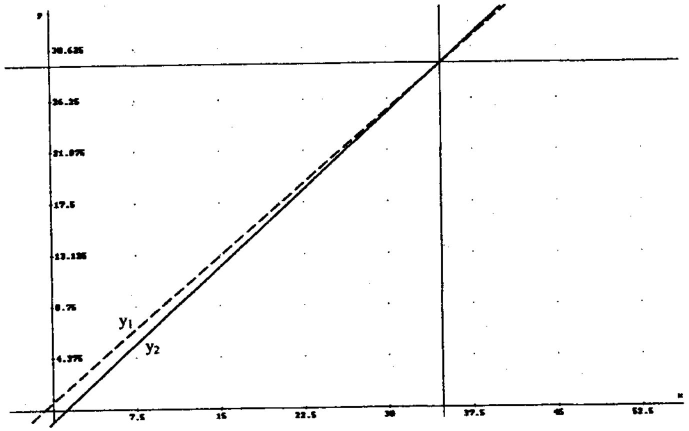
Уравнение линейной регрессии X на Y:

$x-\bar{x}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot(y-\bar{y})$; $\quad x-34{,}8=0{,}97\cdot\frac{14{,}01}{11{,}88}(y-29{,}4)$; $\quad x-34{,}8\approx1{,}14\cdot(y-29{,}4)$;

$x\approx1{,}14\cdot y+1{,}14$; $\qquad y\approx0{,}87\cdot x-0{,}995$.

Построим графики функций на одном чертеже:

$y_1 = 0{,}82 \cdot x + 0{,}75$, $\quad y_2 = 0{,}87 \cdot x - 0{,}995$.



Найдем точку пересечения (x_0, y_0) графиков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

$0{,}82 \cdot x + 0{,}75 = 0{,}87x - 0{,}99$, $\quad 1{,}74 = 0{,}05x$, $\quad x_0 = 34{,}8$,

$y_0 = 0{,}82 \cdot 34{,}8 + 0{,}75 = 29{,}3$.

Случайные величины X и Y являются линейно-зависимыми, так как $r_{xy} \approx 0{,}97$ близок к единице.

Ответ: $r_{xy} = 0{,}97$, $\quad y_1 = 0{,}82 \cdot x + 0{,}75$, $\quad y_2 = 0{,}87 \cdot x - 0{,}99$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО РАЗДЕЛУ "ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ" КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ФАКУЛЬТЕТА

ВАРИАНТ 0

1. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:
A = {все пассажиры выйдут на четвертом этаже},
B = {все пассажиры выйдут на одном и том же этаже},

C = {все пассажиры выйдут на разных этажах},
D = {хотя бы один из пассажиров выйдет на втором этаже},
E = {два пассажира выйдут выше пятого этажа}.

2. В цехе работают 20 станков. Из них 10 станков - марки А, 6 - марки В и 4 - марки С. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, для станка марки А равна 0.9; для станка марки В - 0.8; марки С - 0.7. Каково процентное содержание числа деталей отличного качества во всей продукции цеха?

3. Монета бросается 80 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет не менее 35 раз?

4. Из ящика, в котором 4 белых и 6 черных шаров, вынимают шары по одному без возврата до появления черного шара. Составить закон распределения случайной величины X - числа появившихся белых шаров. Найти M(X) и D(X).

5. Вес мотка пряжи - случайная величина, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием 100 г. Найти ее дисперсию, если отклонение веса мотка от среднего, превышающее 10 г, происходит с вероятностью 0.05.

6. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$$

Найти a, M(X), D(X), P(-1/2 < X < 1/2).

7. Найти коэффициент корреляции между величинами X (вес алмазов в каратах) и Y (оптовая цена плоских шлифовальных алмазных кругов в тысячах рублей) на основании следующих данных:

X	1.55	2.49	4.6	6.0	7.7
Y	230	245	290	325	360

Найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Начертить графики этих уравнений в одной системе координат. Сделать вывод о силе линейной зависимости между X и Y.

ВАРИАНТ 1

1. Из партии, содержащей 10 деталей, среди которых 4 бракованные, наудачу извлекаются последовательно без возврата 3 детали. Найти вероятности следующих событий:
A = {все выбранные детали бракованные},
B = {среди выбранных деталей хотя бы одна бракованная},
C = {среди выбранных деталей ровно две бракованные},
D = {среди оставшихся деталей большинство бракованных},
E = {две последние извлеченные детали бракованные}.

2. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, вторая - 35%, третья - 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт является дефектным?

3. Игральная кость бросается 120 раз. Какова вероятность того, что 6 очков выпадут от 18 до 24 раз?

4. В ящике находятся 3 белых и 2 черных шара. Шары извлекаются по одному без возврата до появления черного шара. Составить закон распределения случайной величины X - числа извлеченных шаров. Найти M(X) и D(X).

5. Процент содержания крахмала в картофеле является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 18% и средним квадратическим отклонением 3%. Найти вероятность того, что обе наудачу взятые картофелины содержат от 16 до 22% крахмала.

6. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<1; \\ a(x-1), & при \quad x\in[1;5]; \\ 1, & при \quad x>5 \end{cases}$$

Найти a, M(X), D(X), $P(3 \le X < 6)$.

7. Найти коэффициент корреляции между величинами X (рост производительности труда в промышленности СССР в процентах за 5 лет с 1950 года) и Y (рост национального дохода в СССР в процентах за 5 лет с 1950 года) на основании следующих данных:

годы	1950	1951	1952	1953	1954	1955
X	100	110	117	125	133	144
Y	100	112	125	136	153	168

Найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Начертить графики этих уравнений в одной системе координат. Сделать вывод о силе линейной зависимости между X и Y.

ВАРИАНТ 2

1. Из ящика, содержащего 5 деталей, среди которых 2 бракованные, наудачу, последовательно и без возврата извлекаются детали до появления бракованной. Найти вероятности следующих событий:
A = {извлечено ровно две детали},
B = {извлечено не более трех деталей},
C = {извлечено более двух деталей},
D = {среди извлеченных деталей нет стандартной},
E = {бракованных и стандартных деталей извлечено поровну}.

2. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.8, для второго - 0.4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

3. Вероятность рождения мальчика равна 0.5. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что в рассматриваемой семье мальчиков больше, чем девочек.

4. Буквы слова "ОГОРОД" рассыпаны в беспорядке. Из них выбирают 4 буквы. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X - числа букв "О" среди выбранных. Найти M(X) и D(X).

5. Размер детали подчинен нормальному закону с параметрами $\alpha = 30$ микрон и $\sigma = 5$ микрон. Детали считаются годными, если размер детали находится в пределах от 20 до 40 микрон. Если размер детали больше 40 микрон, она подлежит переделке. Найти среднее число деталей, подлежащих переделке, из произведенных 1000 деталей.

6. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax, & npu \quad x\in[0;3] \\ 0, & npu \quad x\notin[0;3] \end{cases}$$

Найти a, M(X), B(X), P(-1< X < 1).

7. Найти коэффициент корреляции между величинами X (вес изделия в килограммах) и Y (оптовая цена изделия из прозрачного кварцевого стекла в тысячах рублей) на основании следующих данных:

X	1.5	1.8	2.1	2.4	2.9
Y	625	669	768	801	833

Найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Начертить графики этих уравнений в одной системе координат. Сделать вывод о силе линейной зависимости между X и Y.

ВАРИАНТ 3

1. Вы останавливаете на улице наудачу трех человек и выясняете, в какой день недели они родились. Найти вероятности следующих событий:
A = {все родились в четверг},
B = {ни один не родился в воскресенье},
C = {все родились в различные дни недели},
D = {хотя бы один из опрошенных родился в понедельник},
E = {все родились в один и тот же день недели}.

2. Вероятность того, что студент A решит задачу, равна 1/2; для студента B эта вероятность равна 1/3. Вызванный наудачу студент решил задачу. Какова вероятность того, что это был A?

3. Вероятность того, что саженец клена приживется, равна 0.6. Найти вероятность того, что из 600 саженцев число прижившихся окажется в пределах от 340 до 365.

4. Стрелок имеет 4 патрона и стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.8. Составить закон распределения случайной величины X – числа использованных патронов. Найти M(X) и D(X).

5. Заряд охотничьего пороха отвешивают на весах. Вес заряда - нормально распределенная случайная величина с параметрами $\alpha = 2{,}3$ г и $\sigma = 150$ мг. Найти вероятность повреждения ружья при выстреле, если максимально допустимый вес заряда пороха равен 2,5 г.

6. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & npu \quad x<0; \\ \alpha\sin x, & npu \quad x\in[0;\pi/2]; \\ 1, & npu \quad x>\pi/2 \end{cases}$$

Найти α, f(x), M(X), P($\pi/4 \le X < \pi$).

7. Найти коэффициент корреляции между величинами X (основные фонды пяти заводов СССР в 1950 г. в млн рублей), и Y (выпуск продукции этих заводов в млн рублей) на основании следующих данных:

X	6	8	9	9	10
Y	4	4	5	7	5

Найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Начертить графики этих уравнений в одной системе координат. Сделать вывод о силе линейной зависимости между X и Y.

ВАРИАНТ 4

1. С площади уезжают четыре автомобиля. Каждый автомобиль может с равной вероятностью поехать по любой из четырех улиц, начинающихся от этой площади. Найти вероятности следующих событий:
A = {все автомобили поедут по одной и той же улице},
B = {по каждой из улиц поедет автомобиль},
C = {по одной из улиц не поедет ни один из автомобилей},
D = {хотя бы по одной из улиц поедет более одного автомобиля},
E = {хотя бы по одной из улиц поедут два автомобиля}.

2. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0.8; второй с вероятностью 0.6; третий - с вероятностью 0.5. Кто-то из них выстрелил в цель, но не попал. Какова вероятность того, что это был третий стрелок?

3. На каждые 10 изделий приходится в среднем одно дефектное. Найти вероятность того, что среди 36 взятых наудачу изделий 30 будут без дефектов.

4. Из ящика, в котором 8 белых и 2 черных шара, извлекаются сразу 3 шара. Составить закон распределения случайной величины X - числа извлеченных черных шаров. Найти M(X) и D(X).

5. Размер детали подчинен нормальному закону с параметрами $\alpha = 33$ микрона и $\sigma = 4$ микрона. Поле допуска - от 20 микронов до 40 микронов. Найти вероятность брака.

6. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^3, & при \quad x\in[0;2] \\ 0, & при \quad x\notin[0;2] \end{cases}$$

Найти α, M(X), D(X), P(-1 < X < 1).

7. Найти коэффициент корреляции между величинами X (глубина вспашки в см) и Y (величина урожая с 1 га) на основании следующих данных:

X	8	9	10	11	12
Y	9.0	8.5	9.2	9.6	9.4

Найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Начертить графики этих уравнений в одной системе координат. Сделать вывод о силе линейной зависимости между X и Y.

ВАРИАНТ 5

1. Наудачу набирается семизначный телефонный номер. Найти вероятности следующих событий:
A = {все цифры набранного номера различны},
B = {три последние цифры набранного номера совпадают},
C = {набранный номер начинается с цифры 5},
D = {хотя бы две цифры набранного номера совпадают},
E = {все цифры набранного номера четные}.

2. Производственные мощности трех швейных фабрик относятся как 1:3:5. Процент брака изделий на фабриках равен соответственно 10%, 15%, 20%. Купленное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что это изделие изготовлено на второй фабрике?

3. Производится 240 выстрелов с вероятностью попадания при каждом выстреле, равной 0.7. Какова вероятность того, что произойдет не менее 160 попаданий?

4. Монета бросается до появления герба, но не более пяти раз. Составить закон распределения случайной величины X – числа бросаний монеты. Найти M(X) и D(X).

5. Автомат изготовляет шарики. Диаметр шарика – случайная величина, подчиненная нормальному закону. Известно, что в среднем у 92% шариков абсолютное отклонение диаметра от расчетного диаметра меньше 0.7 мм. Найти число шариков, у которых это отклонение будет меньше 1.08 мм, если изготовлено 1000 шариков.

6. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x<0; \\ \alpha x, & при \quad x\in[0;1]; \\ 1, & при \quad x>1 \end{cases}$$

Найти α, M(X), D(X), P(1/3 ≤X < 4) .

7. Найти коэффициент корреляции между величинами X (энерговооруженность труда в кВт/час на 1 человека) и Y (годовая выработка на одного работника в млн рублей) на основании следующих данных:

X	2	3	4	5	6
Y	2.5	3.0	3.5	4.2	5.1

Найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Начертить графики этих уравнений в одной системе координат. Сделать вывод о силе линейной зависимости между X и Y.

ВАРИАНТ 6

1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0.9. Имея запас из пяти снарядов, ведут стрельбу по цели до первого попадания. Найти вероятности следующих событий:
A = {произведено четыре выстрела},
B = {число промахов и число попаданий совпадают},
C = {попадание произошло не позже, чем при третьем выстреле},
D = {весь запас снарядов израсходован},
E = {стрельба произведена без промахов}.

2. Партия беретов уложена в 100 коробках, причем 10 коробок содержат по 60% белых беретов, 50 коробок содержат по 70% белых беретов, остальные - по 20% белых беретов. Из наудачу взятой коробки наудачу вынули берет. Он оказался белым. Найти вероятность того, что он вынут из коробки, содержащей 20% белых беретов.

3. Наблюдениями в некоторой местности установлена вероятность того, что день будет безоблачным. Она равна 0.25. Найти вероятность того, что в течение недели число безоблачных дней будет не больше трех.

4. В I ящике - 2 белых и 3 черных шара, во II ящике - 3 белых и 3 черных шара. Из каждого ящика вынимают по одному без возврата 2 шара. Случайная величина X - число вынутых белых шаров. Найти M(X) и D(X).

5. Рост человека из некоторой совокупности подчинен нормальному закону с параметрами $\alpha = 176$ см и $\sigma = 8$см. Какова вероятность того, что двое выбранных наудачу людей имеют рост выше - 172 см?

6. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax, & npu \quad x\in[0;2] \\ 0, & npu \quad x\notin[0;2] \end{cases}$$

Найти α, M(X) , D(X), P(-2 < X < 1).

7. Найти коэффициент корреляции между величинами X (основные фонды во всех отраслях народного хозяйства СССР в процентах к 1950 году) и Y (численность рабочих и служащих, занятых в народном хозяйстве СССР в процентах к 1950 году) на основании следующих данных:

годы	1950	1951	1952	1953	1954	1955
X	100	110	121	133	147	164
Y	100	105	109	112	122	124

Найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Начертить графики этих уравнений в одной системе координат. Сделать вывод о силе линейной зависимости между X и Y.

ВАРИАНТ 7

1. Два баскетболиста по очереди бросают мяч в корзину, при этом каждый может сделать не более трех бросков. Выигрывает тот, кто первым забросит мяч. Вероятности попадания при одном броске для первого и второго баскетболиста равны соответственно 0.8 и 0.6. Найти вероятности следующих событий:
A= {выиграл первый баскетболист},
B= {второй баскетболист сделал не менее одного броска},
C= {каждый из баскетболистов сделал ровно по одному промаху},
D = {баскетболисты сделали одинаковое число бросков},
E = {при игре было произведено меньше пяти бросков}.

2. Имеются 2 ящика I типа, 3 ящика II типа и 4 ящика III типа. Ящик I типа содержит 5 шаров: 2 белых и 3 черных; ящик II типа - 4 шара: 3 белых и 1 черный; III типа - 6 шаров: 2 белых и 4 черных. Из наудачу взятого ящика наудачу вынули шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что он был вынут из ящика III типа.

3. В среднем в час происходят 120 обрывов на 1000 веретен. Найти вероятность того, что на 100 веретенах в час произойдет от 10 до 14 обрывов.

4. Игральная кость бросается 4 раза. Составить закон распределения случайной величины X - числа появлений четного числа очков. Найти M(X) и D(X).

5. Производится стрельба - по полосе шириной 20 м с прицеливанием по ее средней линии. Отклонение от средней линии - нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением 16 м. Найти вероятность попадания в полосу при одном выстреле.

6. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} a\cos x, & npu \quad x\in[-\pi/2;\pi/2] \\ 0, & npu \quad x\notin[-\pi/2;\pi/2] \end{cases}$$

Найти α, M(X), P(0 < X < π).

7. Найти коэффициент корреляции между величинами X (основные фонды во всех отраслях народного хозяйства СССР в процентах к 1950 го-

ду) и Y (валовая продукция всей промышленности СССР в процентах к 1950 году) на основании следующих данных:

годы	1950	1951	1952	1953	1954	1955
X	100	110	121	133	147	164
Y	100	116	130	145	165	185

Найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Начертить графики этих уравнений в одной системе координат. Сделать вывод о силе линейной зависимости между X и Y.

ВАРИАНТ 8

1. Игральная кость бросается четыре раза. Найти вероятности следующих событий:

A = {ни разу не выпало 6 очков},
B = {каждый раз выпадало одно и то же число очков},
C = {хотя бы один раз выпало 2 очка},
D = {сумма выпавших очков равна пяти},
E = {все числа выпавших очков оказались различными}.

2. В коробке 10 револьверов, среди которых 6 пристрелянных. Вероятность попасть в цель при одном выстреле из пристрелянного револьвера равна 0.9, из непристрелянного - 0.7. Найти вероятность того, что в результате выстрела из наудачу взятого револьвера произойдет попадание.

3. Семена данного сорта всходят с вероятностью 0.8. Какова вероятность того, что из 90 посеянных семян взойдут не менее 70?

4. В соревнованиях участвуют 3 спортсмена. Вероятности выигрыша для них равны соответственно 0.4; 0.7; 0.8. Найти математическое ожидание и дисперсию числа выигравших спортсменов.

5. Вес изделия распределен по нормальному закону. Известно, что абсолютные отклонения веса изделия от его расчетного веса, превосходящие 150 г, встречаются в среднем 31 раз на 1000 изделий. Найти параметр σ распределения веса изделия.

6. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ ae^{-x}, & при \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Найти α, M(X), D(X), P(-1 < X < 1).

7. Найти коэффициент корреляции между величинами X (валовой отечественный продукт в млрд франков) и Y (импорт в млрд франков) по данным периода 1949-1966 гг. во Франции, представленным в следующей таблице:

X	149.3	161.2	171.5	175.5	180.8	190.7
Y	15.9	16.4	19.0	19.1	18.8	20.4

Найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Начертить графики этих уравнений в одной системе координат. Сделать вывод о силе линейной зависимости между X и Y.

ВАРИАНТ 9

1. В лотерее из 10 билетов 4 выигрышных. Пять человек приобрели по одному билету. Найти вероятности следующих событий:
A = {никто из игравших не выиграл},
B = {хотя бы один из игравших выиграл}.
C = {выиграли ровно двое из игравших},
D = {число проигравших меньше числа выигравших},
E = {среди оставшихся билетов большинство выигрышных}.

2. В первой колоде 32 карты, во второй - 52 карты. Из первой колоды во вторую переложили 2 карты. После этого из второй колоды вынули 1 карту. Найти вероятность того, что вынут туз.

3. Вероятность попадания баскетболистом в корзину при одном броске равна 2/3. Произведено 4 броска по корзине. Найти вероятность того, что произошло не менее трех попаданий.

4. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для стрелков A, B, C равны соответственно 0.9; 0.7; 0.6. Каждый стрелок произвел по одному выстрелу. Составить закон распределения случайной величины X - числа происшедших при этом попаданий в цель. Вычислить M(X) и D(X).

5. Вес рыб, вылавливаемых из пруда, подчинен нормальному закону с параметрами α = 375 г и σ - 25 г. Найти вероятность того, что вес выловленной рыбы не менее 300 г.

6. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot x^2, & при \quad x\in[1;2] \\ 0, & при \quad x\notin[1;2] \end{cases}$$

Найти α, M(X), D(X), P(0 < X < 3/4).

7. Найти коэффициент корреляции между величинами X (темпы прироста производительности труда) и Y (темпы прироста продукции по данным Госкомстата СССР за 1987 г.) на основании данных, приведенных в следующей таблице:

X	3.9	3.1	6.1	3.5	1.9	3.0
Y	3.3	2.6	6.4	3.7	2.5	4.4

Найти уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y. Начертить графики этих уравнений в одной системе координат. Сделать вывод о силе линейной зависимости между X и Y.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Редактор С.А. Кабедева

Подписано в печать 1.11.07. Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 1,75. Тираж 1000 экз.
Заказ 706. РТП изд-ва СПбГУЭФ.

Издательство СПбГУЭФ. 191023. Санкт-Петербург, Садовая ул., д. 21.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

«ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ
2007