ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ
по курсу
«МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ»

для студентов заочного отделения

ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЭКОНОМИКИ И ФИНАНСОВ
2018

Дорошева Е.И., Ермаченко Ю.Г., Кондратьев В.С., Кондратьева И.В., Дорофеев В.Ю.

Методические указания и контрольные задания по курсу “Методы оптимальных решений” для студентов заочного факультетов. – СПб: Изд-во СПбГУЭФ, 2018.-37с.

Методические указания составлены в соответствии с учебной программой курса «Методы оптимальных решений» и предназначены студентам заочного отделения для самостоятельной работы.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доцент – Сайбаталов Р. Х.

Издательство СПбГУЭФ, 2018

Преподавание математики студентам – экономистам, обучающимся на заочном отделении, имеет свою специфику. Студенты этих факультетов, в соответствии с учебной программой, определенные разделы курса должны изучать самостоятельно. Задачей данных методических указаний является помощь в обеспечении студентов материалами для самостоятельного изучения следующих методов решения задач математического программирования:

– графический метод решения задач линейного программирования;
– симплексный метод решения задач линейного программирования;
– методы решения транспортных задач;
– теория игр.

В методических указаниях имеются краткие сведения по теории указанных разделов и образцы решения типовых примеров.

Методические указания могут быть использованы преподавателями так же при проведении контрольных работ, на зачетах и экзаменах.

Вопросы для повторения теории охватывают все темы курса и позволят облегчить проведение зачета (экзамена) по данному курсу.

Вопросы для повторения теории.

Вопросы по математическому программированию.

1. Примеры производственных задач, сводящихся к задачам линейного программирования (задача о составлении производственной программы, задача о диете, задача о раскрое и др.).
2. Общая задача линейного программирования.
3. Понятие допустимого плана (решения) задачи и оптимального плана(решения) задачи.
4.Графический метод решения задач линейного программирования.
5. Каноническая задача линейного программирования, запись задачи в матричной и векторной формах.
6. Определение понятия опорного плана (базисного решения), свободных и базисных неизвестных.

7. Симплексный метод.
8. Построение первой симплексной таблицы.
9. Критерий оптимальности плана, записанного в форме симплексной таблицы.
10. Критерий отсутствия оптимального плана задачи вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых планов.
11. Метод однократного замещения.
12. Двойственная задача линейного программирования.
13. Транспортная задача. Матричная, табличная форма записи транспортных задач.
14. Методы построения начального опорного плана транспортной задачи.
15. Уравновешенная и неуравновешенная транспортная задача. Приведение неуравновешенной транспортной задачи к уравновешенной.
16. Метод потенциалов для решения транспортной задачи.
17. Платёжная матрица.
18. Чистая и смешанная стратегия. Цена игры.

Варианты контрольных работ .

Задачи 1.1-10.1 необходимо решить графическим способом.

Задачи 1.2-10.2 необходимо решить симплексным методом.

Задачи 1.3-10.3 имеют следующее условие.

В m пунктах отправления (ПО) имеется однородный груз в количествах $a_1, a_2, ..., a_m$. Этот груз нужно перевести в n пунктов назначения (ПН), потребности которых равны $b_1, b_2, ..., b_n$. Стоимость перевозки единицы груза из i – го ПО в j – ый ПН равна c_{ij} .

Требуется составить план перевозки грузов из ПО в ПН, при котором суммарные расходы на перевозку будут минимальными.

В задачах 1.4-10.4 необходимо найти цену игры и оптимальные стратегии игроков А и В для заданной платёжной матрицы.

Вариант №1.

1.1. Найти максимум целевой функции L =2x+3y при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 3x+4y \le 12; \\ 2x+y \le 6; \\ x+y \ge 2; \\ x \ge 0; \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):
ДУ: Найти минимум целевой функции L=x-3y при тех же ограничениях.

1.2. Для изготовления изделий А и В предприятие использует три вида сырья. На производство одного вида изделия А требуется 12 кг сырья первого вида, 10 кг – второго и 3 кг – третьего, а на производство одного изделия В соответственно 3 кг, 5 кг и 6 кг. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 684 кг, второго – 690 кг, третьего – 558 кг. Одно изделие А дает предприятию 6 млн. руб. прибыли, а изделие В – 2 млн. руб. прибыли. Составить план производства изделий А и В, максимизирующий общую прибыль предприятия.

1.3.

По\Пн	b_1 =20	b_2 =40	b_3 =40
a_1 =25	5	1	3
a_2 =30	4	2	7
a_3 =45	8	4	9

1.4. Платёжная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

<u>Вариант 2.</u>

2.1. Найти максимум целевой функции L =2x+3y при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 5x+6y \le 30; \\ 10x+7y \le 49; \\ x+2y \ge 2; \\ x \ge 0; \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):
ДУ: Найти минимум целевой функции L=x-y при тех же ограничениях.
2.2. Завод ремонтирует тракторы двух типов: первого - мощностью 300 л.с. и второго – мощностью 200 л.с.. За месяц завод может отремонтировать не более 150 тракторов. За ремонт трактора 1 типа завод получает чистой прибыли 1 млн. рублей, а за ремонт 2 типа 2 млн. рублей. Составить месячный план ремонта тракторов, при котором завод получит не менее 240 млню рублей прибыли и суммарная мощность отремонтированных тракторов будет наибольшей, если надо отремонтировать не менее 50 тракторов 1 типа.
2.3.

По\Пн	b_1=25	b_2=15	b_3=20	b_4=30
a_1=20	3	4	1	2
a_2=30	4	1	2	3
a_3=15	3	2	4	1
a_4=25	1	3	5	2

2.4. Платёжная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 3.

3.1. Найти максимум целевой функции L =4x+3y при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 8x+7y \le 56; \\ 9x+6y \le 54; \\ 2x+3y \ge 6; \\ x \ge 0; \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):
ДУ: Найти минимум целевой функции L=2x-3y при тех же ограничениях

3.2. Предприятие производит изделия А и В и использует сырье трех видов. На производство одного изделия А требуется 3 т сырья первого вида, 2 т – второго и 2 т – третьего вида, а на производство одного изделия В соответственно 4 т, 2 т и 3 т. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 120 т, второго 60 т. Условия поставки и хранения сырья третьего вида таковы, что его расход должен быть не менее 30 т. Одно изделие А дает предприятию 2 млн. руб прибыли, а изделие В – 3 млн. руб прибыли. Составить план производства изделий А и В, максимизирующий общую прибыль предприятия.

3.3.

По\Пн	b_1=2	b_2=5	b_3=4
a_1=6	3	2	3
a_2=3	1	1	1
a_3=2	2	2	2

3.4. Платёжная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 8 \\ 6 & -2 & 7 & 6 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 4.

4.1. Найти максимум целевой функции L =x+2y при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 2x+4y \le 8; \\ 3x \le 9; \\ 5y \le 5; \\ x \ge 0; \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):

ДУ: Найти минимум целевой функции L=3x-2y при тех же ограничениях

4.2. Изготавливается продукция двух видов $П_1$ и $П_2$. Для изготовления этой продукции требуется четыре вида сырья. Для одного изделия продукции $П_1$ требуется 2 ед. сырья первого вида, 2 ед. – второго и 3 ед. – четвертого, а для одного изделия продукции $П_2$ соответственно 2 ед. – первого, 1 ед. – второго и 3 ед. – третьего. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 19 ед., второго – 13 ед., третьего – 15 ед. и четвертого – 18 ед. Одно изделие $П_1$ дает предприятию доход 7 у.е., а $П_2$ - 5 у.е. Требуется составить такой план выпуска продукции $П_1$ и $П_2$, при котором доход предприятия от реализации всей продукции оказался бы максимальным.

4.3.

По\Пн	b_1=5	b_2=7	b_3=3
a_1=2	5	1	3
a_2=6	2	1	1
a_3=7	4	3	2

4.4. Платёжная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & 7 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Вариант 5.</u>

5.1. Найти максимум целевой функции L =4x+y при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 4x+3y \le 40; \\ 12x+3y \ge 24; \\ 2x \le 6; \\ y \ge 3; \\ x \ge 0; \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):
ДУ: Найти минимум целевой функции L=x+y при тех же ограничениях

5.2. Автозавод выпускает грузовики грузоподъемностью 3т и 2т. Общая грузоподъемность автомобилей, выпущенных заводом за неделю, должна быть не менее 600 т. На производство одного трехтонного грузовика затрачивается 400 человеко-часов рабочего времени и 9 млн. рублей на закупку сырья, а на производство одного двухтонного – 500 человеко-часов и 26 млн. рублей соответственно. Предприятие располагает в неделю 400000 человеко-часов рабочего времени и может закупить сырья на сумму 5400 млн. рублей. Найти недельный план выпуска автомобилей, максимизирующий суммарную прибыль завода, если продажа трехтонного грузовика приносит прибыль в 10 млн. рублей, а двухтонного (повышенной проходимости) 30 млн. рублей.

5.3.

По\Пн	b_1 =20	b_2 =20	b_3 =43
a_1 =40	10	5	4
a_2 =23	6	4	5
a_3 =20	7	3	6

5.4. Платёжная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 & 4 \\ 7 & -2 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант 6.

6.1. Найти максимум целевой функции L =2x+3y при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 15x + 5y \le 75; \\ 13x + 7y \le 91; \\ 5x + 3y \ge 15; \\ x \ge 0; \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):

ДУ: Найти минимум целевой функции L=x-2y при тех же ограничениях

6.2. Изготавливается продукция двух видов Π_1 и Π_2. Для изготовления этой продукции требуется три вида сырья. Для одного изделия продукции Π_1 требуется 2 ед. сырья первого вида и 3 ед. – второго, а для одного изделия продукции Π_2 соответственно 4 ед. – первого, 5 ед. – третьего. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 8 ед., второго – 6 ед. и третьего – 5 ед. Одно изделие Π_1 дает предприятию доход 1у.е., а Π_2 - 2у.е. Требуется составить такой план выпуска продукции Π_1 и Π_2, при котором доход предприятия от реализации всей продукции оказался бы максимальным.

6.3.

По\Пн	b_1=17	b_2=21	b_3=41	$b_4=14$	$b_5=24$
a_1=25	10	8	9	6	7
a_2=32	5	6	4	3	2
a_3=40	9	7	5	4	3
a_4=20	11	10	8	9	8

6.4. Платёжная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 5 \\ 4 & -1 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 7.

7.1. Найти максимум целевой функции L =3x+4y при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 2x + y \le 16; \\ x + y \le 10; \\ y \le 6; \\ x \le 7; \\ x \ge 0; \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):
ДУ: Найти минимум целевой функции L=x+y при тех же ограничениях

7.2.Для изготовления изделия А и В предприятие использует три вида сырья. На производство одного изделия А требуется 8 т сырья первого вида, 26 т – второго, а на производство одного изделия В соответственно 13 т и 16 т. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве104 т, второго 208 т. Кроме того, служба сбыта предприятия, проведя маркетинговые исследования установила, что конъюнктура рынка требует, чтобы изделий А производилось не менее 6 штук, а изделий В – не более 7 штук. Производство одного изделия А дает предприятию 6 млн. руб. прибыли, а изделие В – 2 млн.руб. прибыли. Составить план производства изделий А и В, максимизирующий общую прибыль предприятия.

7.3.

По\Пн	b_1 =100	b_2 =30	b_3 =70
a_1 =50	3	4	5
a_2 =120	1	3	2
a_3 =30	6	5	3

7.4. Платёжная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & -6 & 8 & 9 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 8.

8.1. Найти максимум целевой функции L =4x+2y при следующих

ограничениях: $\begin{cases} -x+3y \le 9; \\ 2x+3y \le 18; \\ 2x-y \le 10; \\ x \ge 0; \quad y \ge 0. \end{cases}$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):
ДУ: Найти минимум целевой функции L=2x+3y при тех же ограничениях

8.2.Предприятие строит дома двух проектов A и B и использует три вида основных стройматериалов. На строительство дома по проекту A требуется 5 куб. м кирпича, 10 куб. м - пиломатериалов и 1 т – цемента, а по проекту B соответственно 6 куб. м – кирпича, 7 куб. м – пиломатериалов и 2 т – цемента. На плановый период предприятие обеспечено кирпичем в количестве 30 куб.м, пиломатериалами в количестве 49 куб.м. Из-за трудностей с хранением и большими запасами цемента, его расход не должен быть менее 6 т. Строительство одного дома по проекту A дает предприятию 4 млн. руб прибыли, а – по проекту B – 3 млн. руб прибыли.

Составить план работы предприятия по строительству домов, максимизирующий его общую прибыль, если оно может само выбирать, сколько и по каким проектам строить домов, и незавершенное строительство подлежит оплате пропорциональной выполненным работам.

8.3.

По\Пн	b_1 =20	b_2 =25	b_3 =15	b_4 =10
a_1 =40	3	1	2	4
a_2 =20	2	3	1	6
a_3 =10	1	1	2	5

8.4. Платёжная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 9.

9.1. Найти максимум целевой функции L =6x+y при следующих ограничениях:
$$\begin{cases} x-2y\le 3; \\ 8x+13y\le 104; \\ x\le 5; \\ y\le 2.5 \\ x\ge 0; \quad y\ge 0. \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):
ДУ: Найти минимум целевой функции L=x-y при тех же ограничениях

9.2.Швейная мастерская изготавливает простые и утепленные куртки и использует три вида ткани. На производство одной утепленной куртки требуется ткани первого вида на 11000 руб, второго на 13000 руб и третьего на 3000 руб, а на производство простой куртки – соответственно на 9000 руб, 8000 руб и 4000 руб. На плановый период закуплено ткани первого вида на 99000 руб, второго вида – 104000 руб. При производстве изделий, из соображений рентабельности всего производства, необходимо ткани третьего вида не менее чем на 12000 руб. Реализация одной утепленной куртки дает предприятию 50000 руб прибыли, а реализация простой куртки – 40000 руб прибыли. Составить план производства курток, максимизирующий общую прибыль предприятия при полной реализации произведенной продукции.

9.3.

По\Пн	b_1=20	b_2=40	b_3=40
a_1=30	1	2	1
a_2=20	3	4	2
a_3=20	2	3	3
a_4=30	3	1	4

9.4. Платёжная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 8 \\ -4 & 6 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \\ -5 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант10.

10.1. Найти максимум целевой функции L =5x+4y при следующих ограничениях: $\begin{cases} 19x+11y \le 209; \\ 2x-7y \le 14; \\ 2x+y \ge 4; \\ x \le 6; \\ x \ge 0; \quad y \ge 0. \end{cases}$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):

ДУ: Найти минимум целевой функции L=x-2y при тех же ограничениях

10.2. Изготавливается продукция двух видов $П_1$ и $П_2$. Для изготовления этой продукции требуется использовать два вида сырья. Для одного изделия продукции $П_1$ требуется 19 ед. сырья первого вида и 22 ед. – второго, а для одного изделия продукции $П_2$ соответственно 11 ед. – первого, 38 ед. – второго. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 209 ед., второго – 418 ед. . Одно изделие $П_1$ дает предприятию доход 5 у.е., а $П_2$ - 4 у.е.. Требуется составить такой план выпуска продукции $П_1$ и $П_2$, при котором доход предприятия от реализации всей продукции оказался бы максимальным.

10.3.

По\Пн	b_1 =30	b_2 =20	b_3 =50	b_4 =40
a_1 =40	2	3	1	4
a_2 =60	3	1	4	2
a_3 =20	4	5	2	6
a_4 =25	1	4	3	5

1.4. Платёжная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Правила выполнения и оформления контрольных работ.

При выполнении контрольных работ надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту.

1.Контрольную работу следует выполнять в тетради, отдельной для каждой работы, чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

2.На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы, название дисциплины; здесь же следует указать дату отсылки работы в институт и адрес студента. В конце работы следует проставить дату ее выполнения и расписаться.

3.В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются.

4.Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5.Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие.

6.Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7.После получения прорецензированной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом замечания и выполнить все рекомендации.

Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента на то, что студент может ограничиться предоставлением исправленных отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

Указания к решению контрольных заданий.

Задача 1. Найти максимум целевой функции L =-x+2y при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x - y \geq 0; \\ x + 2y \leq 12; \\ x \leq 6; \\ y \geq 1; \\ x \geq 0; \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):
ДУ: Найти минимум целевой функции L=3x+y при тех же ограничениях.

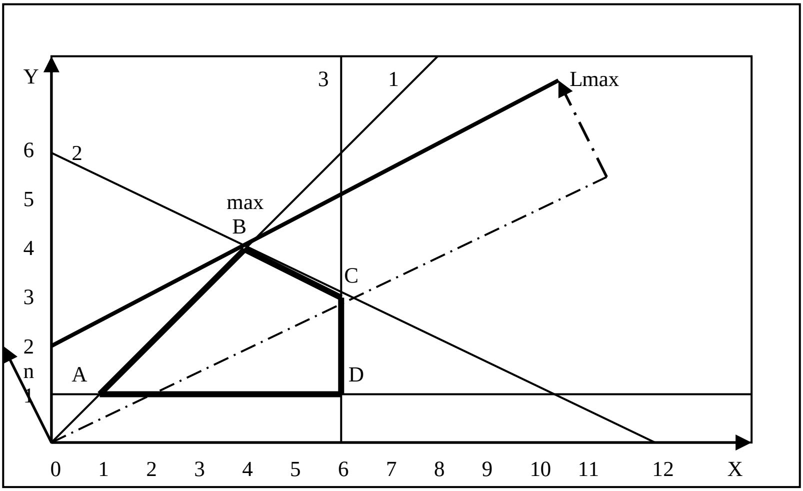
Решение:

Решим неравенство графическим способом. Введем на плоскости прямоугольную систему координат XOY, в которой точки с координатами $x \geq 0, y \geq 0$ находятся в первом квадранте этой координатной плоскости.

Графическое решение неравенства типа $ax + by \leq c$ определяет одну из полуплоскостей, на которые прямая $ax + by = c$ делит координатную плоскость. Решением неравенства будет та полуплоскость все точки которой будут ему удовлетворять.
Исходя из этого, рассмотрим каждое, из приведенной выше системы, неравенство. Решением каждого из них будет соответствующая ему полуплоскость, а решением системы будет область, образованная пересечением всех найденных полуплоскостей. Графическое решение нашей системы приведено на рисунке 1. Здесь прямая (1), соответствует уравнению $x - y = 0$.
Построена она по двум точкам ($x_1 = 0, y_1 = 0$) и ($x_2 = 1, y_2 = 1$) и точка О(2,1), удовлетворяющая нашему первому неравенству $x - y \geq 0$, определяет в качестве решения полуплоскость

,лежащую ниже прямой (1). Аналогично решением второго неравенства $x+2y\leq 12$ является полуплоскость, лежащая ниже прямой (2), соответствующей уравнению $x+2y=12$, решением третьего неравенства является полуплоскость , находящаяся слева от прямой (3) - $x=6$, а решением четвертого, полуплоскость выше прямой (4)- $y=1$.Решением же системы является в нашем случае область АВСД , которая была образована пересечением четырех, выше найденных полуплоскостей. Область АВСД образует область допустимых решений или допустимых планов нашей задачи, в которой мы и будем искать оптимальное решение L=$-x+2y\rightarrow$max. Для этого построим вектор $\vec{n}$ = grad L(x,y) , который укажет направление наибольшего возрастания целевой функции.

Рисунок 1.



Линии, перпендикулярные этому вектору - L(x,y)=const, которые называются линиями уровня, задают одно из возможных значений целевой функции. На графике одно из этих уравнений, например L=-x+2y=6, задает прямую, которой соответствует значение L=6. Максимальное же значение целевой функции будет соответствовать, такой линии уровня, которая будет получена путем параллельного переноса одной из линий уровня, проходящей через область допустимых планов АВСД, в пограничную область АВСД в направлении вектора $\vec{n}$ =(-1,2)=grad L. В нашем случае максимум целевой функции достигается в точке В, которая является точкой пересечения прямых 1 и 2. Решив систему уравнений, соответствующих этим прямым:

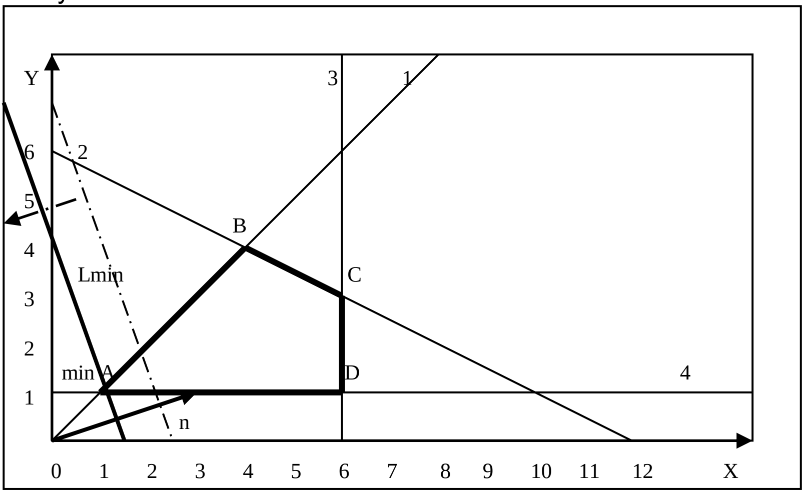
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

получим координаты точки B=(4,4) и Lmax=-4+2x4=4.

Аналогично будем искать минимум целевой функции L=3x+y.

Для этого построим вектор $\vec{n}$ =grad L=(3,1) и одну из линий уровня L, имеющую уравнение 3x+1=6 (см. рисунок 2).

Рисунок 2



Далее будем параллельно перемещать ее в направлении , противоположном направлению вектора $\vec{n}$ (3,1) до границы области допустимых планов АВСД. Последней точкой этой области, через которую проходит наша прямая L и в которой она достигает своего минимального значения будет точка А. Эта точка является пересечением прямых 1 и 3. Решив систему уравнений, соответствующих этим прямым:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

получим координаты этой точки A=(1,1) и Lmin=3x1+1=4.

Задача 2.

Для изготовления изделия A и B предприятие использует три вида сырья. На производство одного изделия A, требуется 2 единицы сырья первого вида и 2 единицы – второго, а на производство одного изделия B соответственно 3 единицы первого, 1 единица второго и 3 единицы третьего. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 19 единиц, второго - 13 единиц и третьего - 15 .Производство одного изделия A дает предприятию 7 млн. руб. прибыли, а изделие B – 5 млн. руб. прибыли. Составить план производства изделий A и B, максимизирующий общую прибыль предприятия.

Решение:

Сведения из задачи о количестве ресурсов, необходимых для производства единицы каждого товара, обеспеченности предприятия этими ресурсами и размерах прибыли, данной каждым из товаров представим в виде следующей таблицы :

Ресурсы	Товары		Запас ресурсов
	A	B	
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
S_3	0	3	15
Прибыль	7	5	

Составим план производства изделий А и В, максимизирующий общую прибыль предприятия.

Обозначим через x_1 и x_2 запланированный объем производства товаров А и В. Из экономического смысла величин x_1 и x_2 следует, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Тогда, учитывая количество единиц ресурсов, затрачиваемых при производстве товаров А и В, а также запасы этих ресурсов, получим следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ 3x_2 \leq 15. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

При этом реализация товаров А и В дает прибыль:

$$f(x) = 7x_1 + 5x_2 \to \max$$

Функция $f(x)$ - называется целевой функцией, которая совместно с описанной выше системой ограничений представляет собой математическую модель приведенной задачи. Решим ее симплекс-методом.

В начале приведем нашу задачу к канонической форме. Для этого от системы неравенств перейдем к системе линейных уравнений, введя дополнительные переменные : x_3, x_4, x_5, экономический смысл которых заключается в том, что это остатки ресурсов при производстве товаров А и В. В итоге получим следующую задачу:

$$f(x) = 7x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13 \\ 3x_2 + x_5 = 15 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$.

Проведем решение с помощью симплексных таблиц. Первая симплексная таблица имеет вид:

Таблица 1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	b_i/a_{ij}
x_3	2	3	1	0	0	19	$19/2$
x_4	**2**	1	0	1	0	13	$13/2$
x_5	0	3	0	0	1	15	-
f	$\boxed{-7}$	-5	0	0	0	0	

Здесь x_3, x_4, x_5 - базисные переменные (именно в этом порядке столбцы образуют единичный базис) и заполняют столбец "B" нашей симплексной таблицы. А переменные x_1 и x_2 - свободные Вектор x^1 = (0,0,19,13,15), является начальным решением нашей исходной задачи. Значение целевой функции на этом плане - f (x^1)=0.

Сформулируем *правило заполнения последней строки, которая называется индексной.* В индексной строке записываются коэффициенты целевой функции с противоположным знаком (эти числа называются оценками опорного плана), и ее значение (в столбце b).

Решение задачи начинается с анализа индексной строки. Наличие отрицательных оценок δ_1=-7 и δ_2=-5 означает, что этот опорный план - x^1 не является оптимальным. Выбор минимальной из отрицательных оценок, которой в нашем случае будет δ_1=-7 позволяет определить разрешающий столбец - A^1 и переменную - x_1, которую будем вводить в базис, а выбор минимальной из оценок b_i/a_{1j} ,которой будет min$\{19/2, 13/2\}$=$13/2$ позволяет определить разрешающую строку A_2 и переменную x_4, которую выведем из базиса, для того чтобы получить новый опорный план. На пересечении выделенных серым цветом в таблице 1 разрешающего столбца - A^1 и разрешающей строки A_2 находится разрешающий элемент a_{21}=2. Далее для перехода к новому базису применяется способ элементарных преобразований метода Гаусса. При этом в преобразование включается и индексная (последняя) строка симплексной таблицы в результате чего происходит вычисление новых оценок. После несложных действий, а именно, делим разрешающую строку на “2” и последовательно умножая полученную новую разрешающую строку на “-2” и складывая с первой и затем на “7” и складывая с последней (третья строка при этом в нашем случае останется без изменений) - получаем следующую таблицу:

Таблица 2

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	b_i/a_{ij}
x_3	0	**2**	1	-1	0	6	$6/2$=3
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	0	$13/2$	$13*2/2$=13
x_5	0	3	0	0	1	15	$15/3=5$
f	0	$-3/2$	0	$7/2$	0	$91/2$	

Новый опорный план x^2=(13, 2, 3, 0, 15/3) невырожденный , но и неоптимальный, так в последней строке симплексной таблицы 2 имеется отрицательная оценка $\delta_2 = -3/2$. Значение целевой функции на этом плане - $f(x^2)$=91/2. Из анализа таблицы 2 следует, что новой базисной переменной нужно сделать x_2. А сравнивая отношения b_1/a_{12}=3, $b_2/a_{22}=13$ и $b_3/a_{32}=5$, заключаем, что из базиса нужно вывести переменную x_3. Очередная таблица будет иметь вид:

Таблица 3

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	b_i/a_{ij}
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	3	
x_1	1	0	$-1/4$	$3/4$	0	5	
x_5	0	0	$-3/2$	$3/2$	1	6	
f	0	0	$3/4$	$11/4$	0	50	

Третий опорный план x^3=(5,3,0,0,6) – оптимальный (отрицательных оценок в нижней строке таблицы больше нет). Так как нулевых оценок в столбцах свободных переменных (на данном опорном плане это - x_3 и x_4) нет, то найденное оптимальное решение единственное. Оптимальное значение целевой функции $f^{opt} = f(x^3) = 50$.

Следовательно оптимальным планом, дающим максимальную прибыль в 50 единиц является производство 5 единиц товара А и 3 единиц товара В. Решение задачи закончено.

Задача 3.

По\Пн	b_1=28	b_2=17	b_3=28	b_4=20
a_1=15	c_{11}=7	c_{12}=3	c_{13}=4	c_{14}= 2
a_2=31	c_{21}=6	c_{22}=1	c_{23}=4	c_{24}=6
a_3=25	c_{31}=6	c_{32}=9	c_{33}=5	c_{34}=3
a_4=22	c_{41}=10	c_{42}=4	c_{43}=7	c_{44}=9

В 4 пунктах отправления (По) имеется однородный груз в количествах a_1=15, a_2=31, a_3=25, a_4=22 . Груз нужно перевести в 4 пункта назначения (Пн), потребности которых равны - b_1=28, b_2=17, b_3=28, b_4=20. Стоимость перевозки единицы груза из i – го По в j – ый Пн равна c_{ij} .

Требуется составить план перевозки грузов из По в Пн, при котором суммарные расходы на перевозку будут минимальными.

<u>Решение:</u>

Решение транспортной задачи начинается с нахождения первого опорного плана. Существует несколько методов построения опорного плана перевозок. Рассмотрим один из них – метод наименьшей стоимости.

В опорном плане должно быть n+m-1, базисных переменных, а значит в таблице столько же занятых клеток, где n – количество По, а m – Пн. В нашем случае n+m-1=4+4-1=7, значит столько заполненных клеток должно быть в нашей транспортной таблице.

При построении опорного плана методом наименьшей стоимости первой заполняется клетка с минимальной стоимостью. При этом либо удовлетворяется заявка соответствующего Пн, либо исчерпывается запас По.

В нашей задаче минимальную стоимость - c_{22}=1 мы имеем в клетке (a_2, b_2). За счет запаса По a_2=31 можно удовлетворить всю заявку Пн b_2=17. Поэтому записываем 17 в клетку (a_2, b_2). При этом заявка Пн - b_2 теперь полностью удовлетворена. Но надо запомнить, что запас По-a_2 уменьшился на 17 единиц и теперь составляет 14 единиц. Следующую по величине стоимость равную c_{14}=2 мы имеем в клетке (a_1, b_4). Но поскольку запас По-a_1=15, что меньше заявки Пн-b_4=20, в эту клетку мы можем записать только 15 единиц товара. При этом запас По-a_1=15 полностью исчерпан, но помним, в Пн -b_4 необходимо доставить еще 5 единиц товара, используя возможности оставшихся По. Так как в клетке (a_1, b_2) имеющей следующую по величине стоимость c_{12}=3, уже стоит прочерк, то далее будет заполнена клетка (a_3, b_4) с такой же стоимостью c_{34}=3, куда мы запишем оставшиеся для полного выполнения заявки 5 единиц товара. Рассуждая аналогично заполняем остальные клетки в такой последовательности:

(a_2, b_3), (a_3, b_3), (a_3, b_1), (a_4, b_1).Нетрудно убедиться, что сумма перевозок в каждой строке равна запасу соответствующего По, а в каждом столбце – заявке соответствующего Пн. В результате получим следующую транспортную таблицу соответствующую первому опорному плану:

.По\Пн	b_1=28	b_2=17	b_3=28	b_4=20
a_1=15	7 -	3 -	4 -	2 **15**
a_2=31	6 -	1 **17**	4 **14**	6 -
a_3=25	6 **6**	9 -	5 **14**	3 **5**
a_4=22	10 **22**	4 -	7 -	9 -

Сам первый опорный имеет вид-
x^1=(0,0,0,15,0,17,14,0,6,0,14,0,14,5,22,0,0,0).
А целевая функция задачи на этом плане равна
$f(x^1)$ =15x2+17x1+14x4+6x6+14x5+5x3+22x10=444.

Этот план можно улучшить, т.е. уменьшить стоимость перевозок за счет другого распределения товара в клетках. Для этого в пустую клетку помещается товар "w" и далее, осуществляя его переброску по замкнутому циклу, используя только базисные, т.е. заполненные клетки, получаем новое распределение заполненных клеток, соответствующих плану с новой стоимостью перевозок, отличной от старой на величину $\Delta f = w \times \delta_{ij}$.Цикл – это замкнутая ломаная из горизонтальных и вертикальных отрезков, соединяющая несколько клеток таблицы и совершающая в каждой из них поворот на 90 градусов. Две последовательные вершины цикла лежат либо в одной строке, либо в одном столбце. В одной из них объем перевозки товара увеличивается (в клетке ставится знак +), в другой уменьшается на столько же единиц (в клетке ставится знак -), а δ_{ij} является оценкой этой клетки. Очевидно, что уменьшение стоимости будет только в том случае, если мы перебросим товар в пустую клетку с отрицательной оценкой.

Существует метод, который позволяет автоматически находить клетки, для которых оценка δ_{ij} будет отрицательной . Этот метод называется методом потенциалов Он состоит в следующем. Предположим, что мы построили первый опорный план перевозок. Далее сопоставим каждому По – число u_i и каждому Пн – число v_j так, чтобы для любой базисной клетки выполнялось условие: $u_i + v_j = c_{ij}$. Числа u_i и v_j называются потенциалами. Оценки - δ_{ij}, вычисляются для пустых клеток по формуле $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Так как в нашем опорном плане m+n-1=4+4-1=7 базисных переменных, то для нахождения потенциалов нужно решить систему из 7 уравнений с 8-ю неизвестными. Поскольку число неизвестных на 1 больше числа уравнений значение одного потенциала можно выбрать произвольно. В нашей задаче система уравнений для нахождения потенциалов имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 2 \\ u_2 + v_2 = 1 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_3 + v_1 = 6 \\ u_3 + v_3 = 5 \\ u_3 + v_4 = 3 \\ u_4 + v_1 = 10 \end{cases}$$

Полагаем u_1=0 и сразу получаем значения остальных потенциалов: v_4=2, u_3=1, v_3=4, u_2=0, v_2=1, v_1=5, u_4=5.

Теперь можно вычислить оценки:

$\delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 7 - (5 + 0) = 2$

$\delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 3 - (1 + 0) = 2$, аналогично δ_{13}=0, δ_{21}=1, δ_{24}=4, δ_{32}=7, δ_{42}=-2, δ_{43} =-2, δ_{44}=-2. Данные оценки занесены в таблицу в свободные клетки слева от стоимостей перевозок и выделены серым цветом.

.По\Пн	b_1=28	b_2=17	b_3=28	b_4=20	u_i
a_1=15	2 7 -	2 3 -	0 4 -	2 **15**	0
a_2=31	1 6 -	1 **17**	4 **14**	4 6 -	0
a_3=25	6 **6**	7 9 -	5 **14**	3 **5**	1
a_4=22	10 **22**	**-2** 4 -	**-2** 7 -	**-2** 9 -	5
v_j	5	1	4	2	

Для перехода к новому опорному плану свободная переменная с отрицательной оценкой вводится в базис, а одна из базисных переменных переводится в свободные. Для этого построим цикл с началом (и концом) в клетке (4,2) с отрицательной оценкой δ_{42}=-2 и вершинами в занятых клетках. Ребра цикла могут проходить и через свободные, и через занятые клетки, но повороты на 90 градусов должны происходить только в занятых клетках. В нашем примере получается следующий цикл:

.По\Пн	b_1=28	b_2=17	b_3=28	b_4=20	u_i
a_1=15	2 7 -	2 3 -	0 4 -	2 **15**	0
a_2=31	1 6 -	1 **17**	4 **14**	4 6 -	0
a_3=25	$+w$ 6 **6**	7 9 -	$-w$ 5 **14**	3 **5**	1
a_4=22	$-w$ 10 **22**	**-2** 4 -	**-2** 7 $+w$	**-2** 9 -	5
v_j	5	1	4	2	

В начальной вершине цикла-клетка(4,3)помещаем символ “$+w$”, в следующей вершине – клетка (3,3) ”$-w$”, потом – клетка (3,1) “$+w$” и так далее по всем вершинам цикла: (4,3)$\to$(3,3)$\to$(3,1)$\to$(4,1)(направление обхода не имеет значения). Значение клеток , отмеченных знаком “$-w$”, уменьшается на величину w, а отмеченных знаком “$+w$” – увеличивается на ту же величину. Для вывода из базиса выбирается клетка, помеченная знаком “$-w$” и имеющая наименьшее значение. Это условие гарантирует не отрицательность нового опорного плана. Если наименьшее значение находится в нескольких клетках, то выбирается любая из них. В любом случае значение целевой функции уменьшается на величину $\Delta = |\delta_{ij} w|$.

В данном примере $w = \min\{x_{41} = 22, x_{33} = 14\} = 14$. Тогда новые значения переменных будут следующими: $x_{43} = 0 + 14 = 14$ (и пустая клетка становится занятой), $x_{33} = 14 - 14 = 0$ (занятая клетка становится пустой), $x_{41} = 22 - 14 = 8$, $x_{31} = 6 + 14 = 20$. Значение целевой функции на новом опорном плане будет равно $f(x^2)$=444 - 2x14=416. Далее переходим к следующей таблице и вычисляем новые значения потенциалов и новые оценки, которые таким же образом заносим в эту таблицу.

.По\Пн	b_1=28	b_2=17	b_3=28	b_4=20	u_i
a_1=15	2 7 -	4 3 -	2 4 -	2 **15**	0
a_2=31	-1 6 $+w$	1 **17**	4 **14**$-w$	2 6 -	2
a_3=25	6 **20**	9 9 -	2 5	3 **5**	1
a_4=22	10 $-w$ **8**	0 4 -	7 **14**$+w$	2 9 -	5
v_j	5	-1	2	2	

В результате проведенных вычислений обнаруживаем, что новый опорный план x^2=(0,0,0,15,0,17,14,0,20,0,0,5,8,0,14,0) также не оптимален так как оценка δ_{21}=-1, т.е. отрицательна и мы можем еще раз уменьшить значение нашей целевой функции. Построив цикл:(2,1)$\rightarrow$(2,3)$\rightarrow$(4,3)$\rightarrow$(4,1), для которого w=8, получим новую таблицу и новое распределение товара, т.е. новый опорный план - x^3=(0,0,0,15,8,17,6,20,0,0,5,0,0,22,0). На этом опорном плане новое значение целевой функции будет равно - $f(x^3)$=416-1x8=408.

.По\Пн	b_1=28	b_2=17	b_3=28	b_4=20	u_i
a_1=15	2 7 -	3 3 -	1 4 -	2 **15**	0
a_2=31	6 **8**	1 **17**	4 **6**	3 6 -	1
a_3=25	6 **20**	8 9 -	1 5 **-**	3 **5**	1
a_4=22	1 10 **-**	0 4 -	7 **22**	3 9 -	4
v_j	5	0	3	2	

Новый же расчет потенциалов и соответствующих оценок показывает, что найденный нами план оптимален, так как среди оценок больше нет ни одной отрицательной. Однако, то обстоятельство, что оценка δ_{42}=0, говорит о том, что найденный опорный план не единственный. Построив цикл с вершинами в клетках (4,2)$\rightarrow$ (2,2)$\rightarrow$(2,3)$\rightarrow$(4,3), можно получить еще один оптимальный опорный план x^4=(0,0,0,15,8,0, 23,0,20,0,0,5,0,17,5,0) с тем же значением целевой функции.

Задача 4.(I вариант) Платёжная матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти цену игры и оптимальную стратегию.

Решение. Задана платёжная матрица размера (4х4). Набор чисел платёжной матрицы имеет смысл платы игрока В игроку А в зависимости от выбранных им стратегий. Стратегии игрока А – это строки матрицы. Стратегии игрока В – столбцы матрицы. Пусть стратегии игрока А нумеруются сверху вниз, а стратегии игрока В – слева направо. Задача игрока А – получить наибольший выигрыш, а задача игрока В – оказаться в наименьшем проигрыше. По правилам игры игрок А выбирает свою стратегию, не зная, какую стратегию выберет игрок В и наоборот: игрок В выбирает свою стратегию, не зная, какую стратегию выберет игрок А. В соответствии с определением, стратегия игрока А – строка чисел. Например, его вторая стратегия – это (3,5,-1,2): если при этом игрок В выбирает первую стратегию, то игрок В платит игроку А 3 ед., при выборе игроком В второй стратегии игрок А получит 5 ед., при выборе игроком В третьей стратегии игрок А платит 1 ед. и, наконец, игрок А получает 2 ед., если игрок В выбирает четвёртую стратегию. Если какая-то стратегия является предпочтительной по отношению к другой, то говорят, что та стратегия, которая более выгодная является доминирующей. Видно, что в заданной платёжной матрице вторая стратегия игрока А доминирует его первую, а третья его – доминирует четвёртую. Следовательно первую и четвёртую стратегии игрока А можно вычеркнуть. Аналогично заключаем, что четвёртая стратегия игрока В также может быть вычеркнута, так как её доминирует третья. В результате вычёркиваний приходит к платёжной матрице (2х3).

Попытаемся найти решение полученной после упрощений задачи в чистых стратегиях. Для этого справа в каждой строке выпишем гарантированный выигрыш игрока А, а внизу под каждым столбцом – максимальный проигрыш игрока В для каждой из стратегий:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} 4 & \;\;5 & \;\;5 \end{array} & \end{array}$$

Договоримся считать, что теперь у игрока А имеется первая и вторая стратегии, а у игрока В – первая, вторая и третья (в оговоренном ранее порядке).

Для игрока А наилучшей является первая стратегия, так как он в наихудшем случае проигрывает 1 ед.: a_0 =–1 – нижняя цена игры, а для игрока В наилучшей является первая стратегия, так как он в худшем случае платит 4 ед. = b_0 верхняя цена игры. Так как нижняя и верхняя цены игры не совпадают, то в чистых стратегиях задача не имеет решения.

Найдём решение задачи в смешанных стратегиях. Для этого будем считать, что игрок А с вероятностью p использует первую стратегию и с вероятностью 1 – p – вторую.

$$\begin{array}{c} p \\ 1-p \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдём средний проигрыш игрока В.

Если игрок В выбирает первую стратегию, то он платит игроку А математическое ожидание проигрыша равное

$$u_1=3p+4(1-p)=4-p$$

Если игрок В выбирает вторую стратегию, то он платит игроку А математическое ожидание проигрыша равное

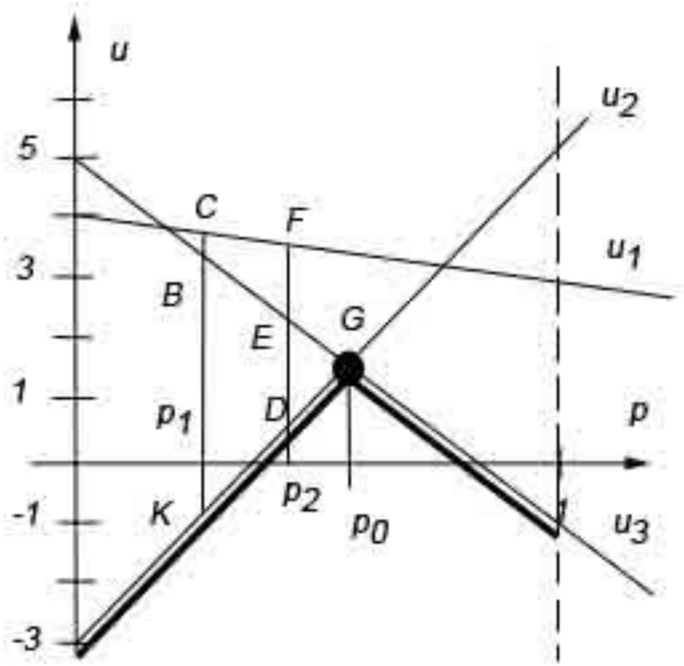
$$u_2=5p-3(1-p)=8p-3$$

Если игрок В выбирает третью стратегию, то он платит игроку А математическое ожидание проигрыша равное

$$u_3=-1p+5(1-p)=5-6p$$

Так как неизвестной величиной является только одна – вероятность p, то проигрыш игрока В удобно изобразить на графике в переменных (u,p).

Изучим график. Если игрок А зафиксировал вероятность p_1, то игрок В имеет возможность выбора стратегии из трёх вариантов: он выберет либо первую стратегию, тогда в среднем будет платить С единиц, либо вторую стратегию, тогда в среднем он будет платить К единиц, либо третью, тогда в среднем он будет платить В единиц. Естественно он заинтересован в наименьшей плате, поэтому он выберет стратегию 2.(точка К) Понимая это, игрок А захочет получить больший выигрыш и выберет другую вероятность, например, p_2. Аналогичное рассмотрение этой вероятности игрока А и выбора игроком В платежей D, E, F, заключаем, что игрок В выберет опять стратегию 2 (точка D). Но при этом ему придётся платить больше, чем если бы игрок А выбрал вероятность p_1. Из приведённого исследования видно, что для разных значений вероятности игрока А, платёж ему – это нижняя огибающая (выделенная жирная линия на рисунке). Тогда наилучший выбор для игрока А – это точка G.



Найдём p_0. Так как

$$u_2 \cap u_3 = G,$$

то

$$8p - 3 = 5 - 6p$$

$$14p = 8, \quad p = \frac{4}{7}$$

Найдём цену игры.

$$\mu = 8 \cdot \frac{4}{7} - 3 = \frac{11}{7}$$

Найдём стратегии игрока В.

Точка G – точка оптимальной стратегии определяется как вторая и третья стратегии игрока В, поэтому первая и четвёртая стратегии игрока В не используются.

Пусть игрок В с вероятностью q использует стратегию 2 и с вероятностью (1 – q) – стратегию три. Но цена игры известна, поэтому можно написать уравнение на q в виде:

$$\frac{11}{7} = 5q + (-1)(1-q), \quad q = \frac{3}{7}, \quad 1-q = \frac{4}{7}$$

Ответ: Оптимальная стратегия матричной игры – смешанная. Игрок А не применяет первую и четвёртую стратегии, вторая стратегия им используется с вероятность 4/7, третья стратегия используется с вероятностью 3/7. Игрок В тоже не применяет первую и четвёртую стратегии, вторую применяет с вероятность 3/7, третью – с вероятностью 4/7. Цена игры равна 11/7.

Задача 4. (II вариант.) Платёжная матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 4 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти цену игры и оптимальную стратегию.

Решение. Пусть как и в предыдущей задаче стратегии игрока А нумеруются сверху вниз, а стратегии игрока В – слева направо.. Видно, что в заданной платёжной матрице вторая стратегия игрока А доминирует его первую. Аналогично заключаем, что третья стратегия игрока В доминирует четвёртую и первую. В результате вычёркиваний приходит к платёжной матрице (3х2). Попытаемся найти решение задачи в чистых стратегиях. Для этого справа от каждой строки выпишем гарантированный выигрыш игрока А, а внизу под каждым столбцом – максимальный проигрыш игрока В для каждой из стратегий. В результате получим:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 & \quad 5 \end{matrix} & \end{array}$$

Договоримся считать, что теперь у игрока А имеется первая, вторая и третья стратегии, а у игрока В – первая и вторая.

Для игрока A наилучшей является первая стратегия, так как он в наихудшем случае выигрывает 3 ед. = a_0 – минимальная цена игры, а для игрока B – и первая и вторая стратегии дают наибольший проигрыш 5 ед. = b_0 максимальная цена игры. Так как нижняя и верхняя цена игры не совпадают, то в чистых стратегиях задача не имеет решения.

Найдём решение задачи в смешанных стратегиях. Будем считать, что игрок B первую стратегию использует с вероятностью q и с вероятностью (1-q) применяет вторую стратегию. Тогда

$$\begin{array}{cc} q & 1-q \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}} \end{array}$$

Найдём средний выигрыш игрока A.

Если игрок A выбирает первую стратегию, то получит в среднем

$$v_1=5q+3(1-q)=3+2q$$

Для второй стратегии игрока A средний выигрыш будет

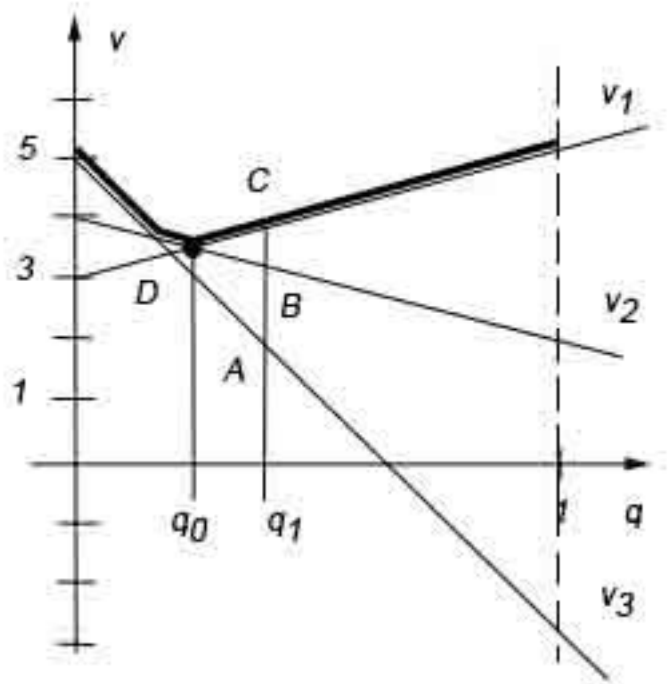
$$v_2=2q+4(1-q)=4-2q$$

Для третьей стратегии игрока A средний выигрыш будет

$$v_3=-3q+5(1-q)=5-8q$$

Так как неизвестной величиной является только одна – вероятность q, то выигрыш игрока A изобразим на графике в переменных (v,q).

Изучим график. Если игрок B зафиксировал вероятность q_1, то игрок A имеет возможность выбора стратегии из трёх вариантов: он выберет либо первую стратегию, тогда в среднем будет платить C единиц, либо вторую стратегию, тогда в среднем он будет платить B единиц, либо третью, тогда в среднем он будет платить A единиц. Естественно он заинтересован в наибольшей плате, поэтому он выберет стратегию 1. Понимая это, игрок B захочет заплатить меньше и выберет меньшее q, а именно q_0. В результате для различных значений q приходим к верхней огибающей как наилучшем выборе стратегии для игрока A (выделенная жирная линия на рисунке). Тогда наилучший выбор для игрока A – это точка D.



Найдём q_0. Так как

$$v_1 \cap v_2 = D,$$

то

$$3 + 2q = 4 - 2q$$

$$4q = 1, \quad q = \frac{1}{4}$$

Найдём цену игры.

$$\mu = 3 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 3.5$$

Найдём стратегии игрока А.

Точка D – точка оптимальной стратегии определяется как пересечение второй и третьей стратегий игрока А, поэтому первая и четвёртая стратегии игрока А не используются.

Пусть игрок А с вероятностью p использует стратегию два и с вероятностью (1 – p) – стратегию три. Тогда:

$$5p + 2(1-p) = 3p + 4(1-p), \quad p = \frac{1}{2}$$

Ответ: игрок А не использует первую и четвёртую стратегии, вторая и третья стратегии используется с равной вероятностью 1/2, игрок В также не использует первую и четвёртую стратегии, вторая стратегия используется с вероятностью ¼, третья стратегия – с вероятностью ¾, при этом цена игры равна 3.5.

Литература

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
2. Ашманов С. А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.
3. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
4. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988.
5. Идельсон А. В., Кондратьев В. С.,Заварзина И. А. Методические указания по курсу “Математическое программирование” для студентов вечернего и заочного факультетов. – Издат.: СПбУЭФ, 1992.
6. Карманов В. Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986.
7. Ковбаса С. И., Кондратьев В. С., Кондратьева И. В., Савинов Г. В. Методические указания и курсовое задание по курсу “Математическое программирование” для студентов вечерне-заочного факультета. – Издат. СПбУЭФ, 1998.
8. Дмитриев В. Г., Дорошева Е. Н., Савинов Г. Н., Сорокина О. А. Основы линейного программирования – Издат.: СПбГУЭФ, 2006.
9. Шикин Е. В. От игр к играм. Математическое введение. Москва, изд. УРСС, 2003.